科学者・技術者のための

変分法

L.E.エルスゴルツ著
理学博士 瀬川富士訳

理工学海外名著シリーズ 11

ブレイン図書出版株式会社

CALCULUS OF VARIATIONS

by

L. E. ELSGOLC

First published in English 1961

U.S.A. Edition distributed by
Addison-Wesley Publishing Company, Inc.,
Reading, Massachusetts, U.S.A.

AUTHORIZED TRANSLATION FROM ENGLISH
LANGUAGE EDITION PUBLISHED BY ADDISON-
WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.

PERGAMON PRESS LTD.
London · Paris · Frankfurt

ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY INC.
Reading, Massachusetts, U.S.A.
1962

ロシア語第一版への序文

最近は力学や工学のいろいろな分野で，変分法の応用が盛んになってきた。そのために，種々の専門の技術者が変分法の基礎を学ぶ必要に迫られている。

この書物のねらいは，技術者および工学部の学生に対して，変分法の基礎的な概念や標準的な手法に慣れさせ，あわせて実用的見地から見て重要な，変分の問題の直接的な解法を述べることである。

各章には，在来の教科書からとったものも含めて，多くの例題が説明されている。

L. E. ELSGOLC

訳者のことば

“エルスゴルツ の変分法を訳出することは，果して意味のあることであろうか”，そう自分に問うたうえで，やはりこのような書物は現在の日本において，出版の意味があると考えられたので実行することにした。

変分法という題名の下で出版されている邦書は，決して少くはない。しかし一方では，余りに数学的厳密性を追求するに急で，なかなか理工学者にとって，近づき易いものとは思われないものもある。他方，応用を主としたものについていえば，それが応用されている場面——しかも形式的に——については詳しいが，その基礎となる考え方については，必ずしも十分に説明されているとはいえないように思われる。

エルスゴルツの書物は，その点で，微分と変分との対応関係を出発点として，極めて懇切丁寧な説明がなされており，場合によっては親切すぎるほどの説明が与えられている。応用もその適切な場所にはめこまれており，非常にわかり易い書物であるとの印象を受けた。ただ極値の十分条件のⅢ章は，いくらか，数学的に難解な点もあると思われるので，初めての読者はⅢ章を省略されて，Ⅰ，Ⅱ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅲ章の順序に読まれるのがよいのではないかと思われる。理工学の応用では，Ⅲ章の内容が必要になるのは，比較的まれなことだからである。

この書物の飜訳，出版に当っては富久泰明氏の示唆に負う所が多く，また鮮明にして正確な組版，印刷の高度な技術については，株式会社関洋紙店印刷所の森　明貞氏に負う所が多く，ここに記して厚く感謝の意をあらわす次第である。

1972年8月30日

瀬　川　富　士

目　　次

ロシア語第一版への序文……iii
訳者のことば……iv
序　論……1

I章　境界が固定された問題に対する変分法

1. 変分とその性質……5
2. オイラーの方程式……14
3. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\,dx$ の形の汎関数……31
4. 高階の導関数を含む汎関数……34
5. 数個の独立変数を含む関数に依存する汎関数……40
6. 変分問題のパラメーター表示……47
7. 応用例……51

問　題……55

II章　動き得る境界をもつ変分の問題とその他の問題

1. 動きうる境界をもつ最も簡単な問題……58
2. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$ の形の汎関数に対する動きうる境界をもつ問題……66
3. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,dx$ の形の汎関数に対する動きうる境界をもつ問題……72
4. 尖点をもつ極値曲線……76
5. 片側変分……88
6. 混合問題……91

問　題……94

III章　極値に対する十分条件

1. 極値曲線の場……96

2. 関数 $E(x, y, p, y')$ ………… 103
問　題 ………… 117

IV章　拘束条件つきの極値を求める変分の問題

1. $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ の形の拘束 ………… 119
2. $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) = 0$ の形の拘束 ………… 128
3. 等周問題 ………… 131
問　題 ………… 139

V章　変分の問題を解くための直接的な方法

1. 直接的な方法 ………… 140
2. 差分法によるオイラーの方法 ………… 142
3. リッツの方法 ………… 144
4. カントロヴィッチの方法 ………… 157
問　題 ………… 163

問題解答 ………… 165
参考文献 ………… 169
索　引 ………… 171

人名索引 ………… 176

序　　論

工学における数学の応用では，与えられた関数 $z = f(x)$ の極大値や極小値を見つける問題とならんで，**汎関数** (*functional*) とよばれているものの値の極大，極小を求めなければならないことがしばしばある。

汎関数というのは，関数が，ある関数族あるいは，有限個の関数の中を動くとき，それに応じて異なる値をとり，その値は選んだ関数によって完全に決定されるようなものである。

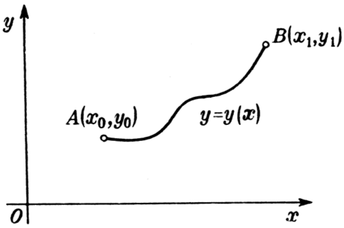


図　1.

たとえば，平面上の与えられた二点を結ぶ曲線の長さ l は，一つの汎関数である。なぜなら，この長さは，そのグラフがこれらの点を通るような定まった関数 $y = y(x)$ を選ぶことによって，完全に決定されるからである (図 1)。曲線の方程式 $y = y(x)$ が与えられれば，直ちにその長さ l は，つぎの式によって計算することができる：

$$l\big(y(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

同じように，ある曲面の面積も汎関数である。この面積は，定まった曲面の選び方，すなわち曲面をあらわす方程式を $z = z(x, y)$ と書いたときの関数 $z(x, y)$ の選び方によって，完全に決定される。よく知られているように，面積は

$$S(z(x, y)) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

で与えられる。ここで D はこの曲面の x, y-平面への射影である。

一様な曲線あるいは曲面の，一点あるいは一つの軸，あるいは一つの平面に関する慣性モーメントもまた，汎関数である。それらの値は，これらの曲線あるいは，曲面の選び方によって，すなわちこれらの方程式に含まれる関数の選び方によって，完全に決定される。

ある媒質の中を，与えられた速度で運動する物体の受ける抵抗 p も汎関数である。p の値はこの物体の表面の形によって，完全に決定される。すなわち，この表面をあらわす方程式に含まれる関数の選び方によって，完全に決定される。

これらすべての例は，事実すべての汎関数の特徴であり，また通常の関数の特徴と類似した，一つの共通な性質をもっている。一つの汎関数 $v = v(y(x))$ が与えられると，各関数 $y = y(x)$ に対して，それに対応する一つの数値 v が一意的に定まる。そのことはちょうど，一つの“通常の”(**ordinary**) 関数 $z = f(x)$ があるとき，各数値 x に対して，一意的に数値 z が対応するのと同じである。

変分法は，汎関数の極大および極小値を求める方法を与えるものである。ある汎関数の極大あるいは極小を求める問題は**変分問題**（*variational problem*）とよばれる。

変分法は **1696** 年以来発展をつづけてきており，ペテルスブルグ科学アカデミー会員オイラー（**L. Euler**）のいくつかの基本的な発見の後，それ自身の研究法をもった数学における独立な一分野になっている。したがって，われわれには，オイラーを変分法の創始者と主張するに足る，十分な理由があるわけである。

つぎにのべる三つの問題は，変分法の発展に重要な影響を与えた。

最速降下線の問題（**brachistochrone problem**）**1696** 年にヨハン・ベルヌーイ（**Johann Bernoulli**）は，一つの論文を発表した。その中で彼は数学者に対して，最も速かに降下する径路——最速降下線——を決定するという問題を暗示した。これは，同一鉛直線上にない二点 A, B が与えられたとき，一つの質点が A から B へ最も短い時間で，滑り落ちるような A, B を結ぶ曲線を見出すという問題である（図2）。点 A, B を結ぶ最も短い線は直線である

が，最も速かに滑りおちる径路は A, B を結ぶ直線ではないことは，容易にわかる。質点が直線に沿うて滑り落ちるときには，質点は比較的ゆっくりとスピードを増して行く。もし曲線が出発点の近くで直線より急であれば，全体の長

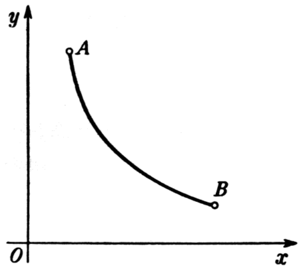


図　2.

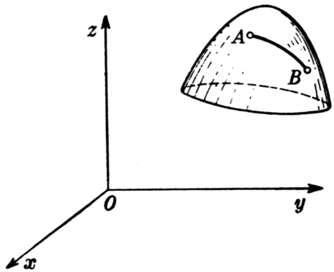


図　3.

さは増加するが，その大部分で質点の速さは直線の場合よりも大きくなるであろう。最速降下線の問題の解答はヨハン・ベルヌーイ（**Johann Bernoulli**），ヤコブ・ベルヌーイ（**Jacob Bernoulli**），ニュートン（**Newton**）およびド・ロピタル（**de l'Hospital**）によって与えられた。最速降下の曲線はサイクロイド（**cycloid**）であることが，後にわかるであろう（30 頁を見よ）。

測地線の問題（**problem of geodesics**）これは，与えられた曲面 $\varphi(x, y, z)=0$ の上にあって，この曲面上の二つの与えられた点を結ぶ最も短い曲線を見出す問題である（図 **3**）。そのような曲線は測地線とよばれる。これは拘束条件の下での，極値を求める変分問題の典型的な一例である。われわれは，汎関数

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

の極小値を，$y(x)$，$z(x)$ が $\varphi(x, y, z)=0$ を満たすという条件の下で，求めなければならない。この問題は，**1697** 年にヨハン・ベルヌーイによって解かれた。しかしこの型の問題を解く一般的な方法は，オイラーとラグランジュ（**J. Lagrange**）によって与えられた。

等周問題（**isoperimetric problems**）これは与えられた長さ l をもつ

閉曲線で，その囲む面積 S が，最大になるような ものを見出す 問題である。そのような曲線が円でなければならないということは，すでに古代ギリシャ人に知られていた。この場合には曲線の長さが一定であるという付加条件，すなわち汎関数

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt\ (*)$$

を一定に保つという条件の下で，汎関数 S の極値を見出すという問題を解かなければならない。このような付加条件は**等周条件**(***isoperimetric condition***)とよばれている。等周条件の付いた問題の解を見出す一般的な方法は，オイラーによって詳細に仕上げられた。

以下では種々の変分問題を解くためのいくつかの方法を示すことにしよう。

(*) この書物では以下 t に関する導関数を $\dot{x}$ であらわすことにする。

I　章

境界が固定された問題に対する変分法

1.　変分とその性質

変分の問題，すなわち汎関数の極大あるいは極小を求める問題を解く方法は，普通の関数の極大，極小を見出す問題の解法と非常によく似ている。それゆえ，普通の関数の極大極小の理論を簡単に思い出し，それと平行に汎関数に対する類似の概念を導入し，そして類似の定理を証明することは興味のないことではない。

1. ある領域内の x のおのおのの値に対して，z のある値が対応する，すなわち与えられた数 x に，一つの数 z が対応するならば，z は変数 x の**関数**であるとよばれ，$z=f(x)$ と書かれる。

2. 関数 $f(x)$ の変数 x の**増分**（*increment*）は，この変数の二つの値の差 $\Delta x = x - x_1$ である。もし x が独立変数であれば，そのときには，x の微分はその増分と一致する。すなわち $dx = \Delta x$ である。

3. 関数 $f(x)$ は，x の小さい変化が常に関数 $f(x)$ に小さい変化を生じさせるならば，**連続関数**であるといわれる。

1. ある関数族の中のおのおのの関数 $y(x)$ に対して，v のある値が対応する，すなわち，一つの与えられた関数 $y(x)$ に，一つの数 v が対応すれば，v は変関数 $y(x)$ に依存する**汎関数**とよばれ，$v = v\big(y(x)\big)$ と書かれる。

2. 汎関数 $v\big(y(x)\big)$ の変関数 $y(x)$ の**増分**あるいは**変分**（*variation*）δy は，二つの関数の差すなわち，$\delta y = y(x) - y_1(x)$ である。変関数 $y(x)$ はある関数族の中を動くものと仮定されている。

3. 汎関数 $v\big(y(x)\big)$ は，$y(x)$ の小さい変分が常に汎関数 $v\big(y(x)\big)$ に小さい変化を生じさせるならば，**連続汎関数**であるといわれる。

連続関数についての定義は，もっと正確かつ明瞭にすることができる。それ

自身が一つの汎関数の変数である変関数 $y(x)$ の変分は，どのような場合に小さいといわれるのか，あるいは二つの曲線 $y=y(x)$ と $y=y_1(x)$ はどのような場合に，お互に近いといわれるのか，というような疑問が生じる。

一つの可能性は，二つの関数 $y(x)$ と $y_1(x)$ の差 $y(x)-y_1(x)$ の絶対値が，これらの関数が定義されている x のすべての値に対して，小さいときにはいつでも関数 $y(x)$ と $y_1(x)$ はお互に近いと仮定することである。すなわち横座標の各点毎に，近いような二つの曲線は，お互に近いと考えられる。しかしながら，多くの問題では，二つの曲線が横座標の各点毎に近いだけでなく，そのうえ二つの曲線上の対応する点における接線が，互に接近した方向をもっている場合に限って，二つの曲線は近いと考える方がよい。すなわち，そのような問題では，差 $y(x)-y_1(x)$ の絶対値のみならず，差 $y'(x)-y_1'(x)$ の絶対値も小さいときに限って，二つの曲線は近いといわれるわけである。

ときには，二つの関数についてつぎのようなすべての差

$$y(x)-y_1(x),\ y'(x)-y_1'(x),\ y''(x)-y_1''(x),\ \ldots\\ \ldots,\ y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$$

の絶対値が任意に小さいときにのみ，互に近いと仮定しなければならないことがある。

したがって，われわれは，**関数の近さ**（**closeness**）についてつぎのような定義に導かれる：

二つの曲線 $y=y(x)$ と $y=y_1(x)$ は，差 $y(x)-y_1(x)$ の絶対値が小さいならば，**0 次の近さ**（*closeness of order zero*）の意味で近い，あるいは 0 次の近さの意味で隣接している（**neighbouring**）という。

二つの曲線 $y=y(x)$ と $y=y_1(x)$ は，もし二つの差 $y(x)-y_1(x)$ と $y'(x)-y_1'(x)$ の絶対値が小さいならば，**1 次の近さ**の意味で近い，あるいは 1 次の近さの意味で隣接しているという。

二つの曲線 $y=y(x)$ と $y=y_1(x)$ は，差

$$y(x)-y_1(x),\ y'(x)-y_1'(x),\ \ldots,\ y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$$

の絶対値が小さいならば，**k 次の近さ**の意味で近い，あるいは k 次の近さの意味で隣接しているという。

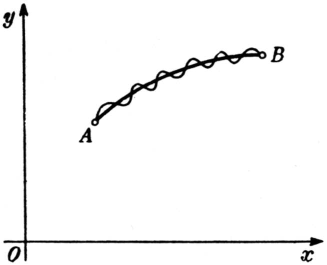


図 4.

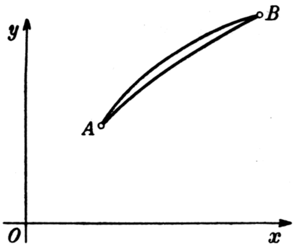


図 5.

0 次の近さの意味では隣接しているが，**1** 次の近さの意味では近くない二つの曲線は，図 **4** に示されている。対応する点の縦座標は近いが，そのような点における接線の方向は，大きく変わっている。**1** 次の近さの意味で近い二つの曲線は，図 **5** に与えられている。

この定義から直ちに，k 次の意味で隣接する二つの曲線は，k よりも小さい任意の次数の意味でも，隣接するということが導かれる。

ここまでくれば，汎関数の連続性の定義を，もっと正確につぎのようにのべることができる：

3′. 関数 $f(x)$ が**点 $x=x_0$ において連続である**というのは，つぎのことを意味する。すなわち，任意に与えられた正数 ε のおのおのに対して

$$|x-x_0|<\delta$$

であるときは常に

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

が成り立つような $\delta>0$ が存在する。

もちろん，x は $f(x)$ が定義されているような値だけをとるものとする。

3′. 汎関数 $v\big(y(x)\big)$ が k 次の近さの意味で，**$y=y_0(x)$ において連続である**というのは，つぎのことを意味する。すなわち，任意に与えられた正数 ε に対して

$$|y(x)-y_0(x)|<\delta,$$

$$|y'(x)-y_0'(x)|<\delta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\delta$$

であるときには常に

$$\left|v\big(y(x)\big)-v\big(y_0(x)\big)\right|<\varepsilon$$

が成り立つような $\delta>0$ が存在す

4. 関数 $l(x)$ は，つぎの二つの条件が満足されるとき**線形**（一次）であるといわれる。すなわち c を任意の定数として

$$l(cx) = cl(x)$$

および

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$$

たとえば独立変数が 1 個の線形関数は，すべて k を一つの定数として

$$l(x) = kx$$

の形をもっている。

5. 関数 $f(x)$ の増分

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

が

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \\ + \beta(x, \Delta x)\cdot \Delta x$$

の形であって，$\Delta x \to 0$ のとき $A(x)$ は Δx によらず，また $\beta(x, \Delta x) \to 0$ であれば，$f(x)$ は**微分可能な**(*differentiable*) 関数とよばれ，Δx に関して一次の項，すなわち $A(x)\Delta x$ は

る。

もちろん，関数 $y(x)$ は，$v\big(y(x)\big)$ が定義されているような関数族の中からとられるものとする。

4. 汎関数 $L\big(y(x)\big)$ は，つぎの二つの条件を満足するとき**線形汎関数**(*linear functional*) であるといわれる。すなわち，c を任意の定数として，

$$L\big(cy(x)\big) = cL\big(y(x)\big)$$

および

$$L\big(y_1(x) + y_2(x)\big) \\ = L\big(y_1(x)\big) + L\big(y_2(x)\big)$$

たとえば，汎関数

$$L\big(y(x)\big) \\ = \int_{x_0}^{x_1} \big(p(x)y + q(x)y'\big)dx$$

は線形汎関数である。

5. 汎関数 $v\big(y(x)\big)$ の増分

$$\Delta v = v\big(y(x) + \delta y\big) - v\big(y(x)\big)$$

が

$$\Delta v = L\big(y(x), \delta y\big) + \\ + \beta\big(y(x), \delta y\big)\max|\delta y|$$

の形であって，$L\big(y(x), \delta y\big)$ が δy に関して線形の関数であり，さらに $\max|\delta y|$ を $|\delta y|$ の最大値としたとき $\max|\delta y| \to 0$ となるときは常に $\beta\big(y(x), \delta y\big) \to 0$ であれば，この

$f(x)$の**微分**といわれ，dfで示される。これをΔxで割って$\Delta x \to 0$とすると，$A(x) = f'(x)$が得られるから

$$df = f'(x)\Delta x$$

である。

増分の中でδyに関して線形の部分，すなわち$L(y(x), \delta y)$はその**汎関数の変分**（*variation*）とよばれ，δvと書かれる。

それゆえ，汎関数の変分は，その増分の中でδyに関して線形な主要部である。

変分が汎関数の理論において演ずる役割は，ちょうど微分が通常の関数の理論において演ずる役割と同じである。

上にのべたのとほとんど等価だが別の方法で，関数の微分あるいは汎関数の変分を定義することもできる。関数$f(x+\alpha\Delta x)$の値を考えよう。ここで，xとΔxは固定し，αを変数と考える。$\alpha = 1$とおけば，関数の増加した値$f(x+\Delta x)$が得られ，$\alpha = 0$とおけば，始めの値$f(x)$が得られる。$\alpha = 0$における$f(x+\alpha\Delta x)$のαに関する導関数が，$f(x)$のxにおける微分に等しいことは容易にわかる。実際，合成関数の微分法の一般法則によれば

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0} = f'(x+\alpha\Delta x)\Delta x\Big|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x = df(x)$$

である。

同じことは，独立変数の数が多い関数

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

に対しても成り立つ。

その微分は，関数

$$f(x_1+\alpha\Delta x_1, x_2+\alpha\Delta x_2, \ldots, x_n+\alpha\Delta x_n)$$

をαに関して微分して$\alpha = 0$とおけば得られる。事実

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x_1+\alpha\Delta x_1, x_2+\alpha\Delta x_2, \ldots, x_n+\alpha\Delta x_n)\Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = df$$

である。

同じような方法で，$v\big(y(x)\big)$ の形の汎関数，あるいはもっと一般的な汎関数に対してさえも，その変分を，汎関数 $v\big(y(x)+\alpha\delta y\big)$ の α に関する導関数の $\alpha=0$ における値として，定義することができる。実際，もし汎関数の増分の線形主要部の意味での変分が存在するならば，この増分はつぎの形をもっている：

$$\begin{aligned}\Delta v &= v\big(y(x)+\alpha\,\delta y\big)-v\big(y(x)\big)\\ &= L(y,\,\alpha\,\delta y)+\beta(y,\,\alpha\,\delta y)|\alpha|\max|\delta y|\end{aligned}$$

$v(y+\alpha\,\delta y)$ の α に関する導関数は，$\alpha=0$ において，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\,\alpha\,\delta y)+\beta\big(y(x),\,\alpha\,\delta y\big)|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\,\alpha\,\delta y)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta\big(y(x),\,\alpha\,\delta y\big)|\alpha|\max\,|\delta y|}{\alpha}\\ &= L(y,\,\delta y)\end{aligned}$$

となる。なぜなら

$$L(y,\,\alpha\,\delta y)=\alpha\,L(y,\,\delta y)$$

であり，また，$\alpha\to 0$ のときは常に $\beta\big(y(x),\,\alpha\,\delta y\big)\to 0$ となるため

$$\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta\big(y(x),\,\alpha\,\delta y\big)|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}\\ &\qquad=\lim_{\alpha\to 0}\beta\big(y(x),\,\alpha\,\delta y\big)\max|\delta y|=0\end{aligned}$$

が成り立つからである。

したがって，汎関数の増分の線形主要部の意味での変分が存在すれば，パラメーターに関する導関数の，そのパラメーターの初期値における値，という意味での変分もまた存在し，この二つの変分の概念は等価になる。

6. 関数 $f(x)$ の微分は

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x+\alpha \Delta x)\Big|_{\alpha=0}$$

によって与えられる。

6. 汎関数 $v(y(x))$ の変分は

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\big(y(x)+\alpha\,\delta y\big)\Big|_{\alpha=0}$$

によって与えられる。

〔**定義**〕 汎関数 $v(y(x))$ は，つぎにのべる場合に，曲線 $y=y_0(x)$ において極大値をとるという。曲線 $y=y_0(x)$ に任意に近い曲線において，この汎関数 $v(y(x))$ のとるすべての値は $v(y_0(x))$ よりも大きくない。すなわち $\Delta v = v(y(x))-v(y_0(x)) \leqslant 0$。もし $\Delta v \leqslant 0$ であって，かつ $y(x)=y_0(x)$ のときに限り $\Delta v=0$ であれば，その汎関数 $v(y(x))$ は曲線 $y=y_0(x)$ において狭義の極大であるといわれる。同じようにして，汎関数が極小値をとるような曲線 $y=y_0(x)$ を定義する。この場合には曲線 $y=y_0(x)$ に十分近いすべての曲線に対して $\Delta v \geqslant 0$ である。

7.〔**定理**〕 微分可能な関数 $f(x)$ が，内点 $x=x_0$ で極大値あるいは極小値をとるならば，この点において

$$df=0$$

が成り立つ。

7.〔**定理**〕 汎関数 $v(y(x))$ の変分が存在し，v が $y=y_0(x)$ において極大値あるいは極小値をとるならば，$y=y_0(x)$ において

$$\delta v=0$$

が成り立つ。

汎関数に対する定理の証明

$y_0(x)$ と δy を固定すると，$v\big(y_0(x)+\alpha\,\delta y\big)=\varphi(\alpha)$ は α の関数であって，$\alpha=0$ に対して極大値または極小値をとる。それゆえ

$$\varphi'(0)=0\ ^{(1)}$$

である。あるいは

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\big(y_0(x)+\alpha\,\delta y\big)\Big|_{\alpha=0}=0$$

すなわち $\delta v=0$ である。したがって，汎関数の変分は，その汎関数に極値をとらせるような曲線において 0 になる。

---

(1) α は点 $\alpha=0$ のある近傍で正および負の任意の値をとることができるものと仮定する。

汎関数の極値の概念は，もっと精密化されなければならない。極大，極小あるいはもっと正確にいえば，相対的極大，極小という言葉は，互に隣接する曲線群において汎関数のとる値の中での，最大値あるいは最小値を意味する。しかしながら，上にのべたように，近さの概念は種々の異なった方法で導入されうるから，極大や極小について語るときには，近さの次数がはっきりと指摘されなければならない。

もし曲線 $y = y_0(x)$ が，差 $y(x) - y_0(x)$ の絶対値が小さいようなすべての曲線群 $y(x)$ の中で，すなわち 0 次の近さの意味で $y = y_0(x)$ に隣接するすべての曲線群の中で，汎関数 $v\big(y(x)\big)$ を極大あるいは極小にするならば，そのような極大あるいは極小は**強い**（*strong*）といわれる。

もし曲線 $y = y_0(x)$ が，1 次の近さの意味で $y = y_0(x)$ に隣接する曲線群，すなわち座標だけではなく，傾きも含めて $y = y_0(x)$ に近いすべての曲線に関してのみ，汎関数を極大または極小にするならば，そのような極大または極小は**弱い**（*weak*）といわれる。

明らかに，曲線 $y = y_0(x)$ が汎関数を強い極大（あるいは極小）にするならば，またこの曲線は同じ汎関数を弱い極大（あるいは極小）にする。なぜなら，一次の近さの意味で隣接する曲線は，0 次の意味でも隣接しているからである。しかしながら，汎関数が曲線 $y = y_0(x)$ において弱い極大値（あるいは極小値）をとるが，それが強い極大値（あるいは極小値）ではないということは起り得る。なぜなら，曲線 $y = y_0(x)$ に座標も傾きも近い曲線であって，$v\big(y(x)\big) > v\big(y_0(x)\big)$〔極小の場合には $v\big(y(x)\big) < v\big(y_0(x)\big)$〕であるようなものは存在しないが，座標のみが近いような曲線群の中には，$v\big(y(x)\big) > v\big(y_0(x)\big)$〔極小の場合には $v\big(y(x)\big) < v\big(y_0(x)\big)$〕であるような曲線を見出すことのできる場合がありうるからである。強い極値と弱い極値を区別しても，極値に対する基本的な必要条件の証明には変わりはない。しかしながら，この区別は，極値に対する十分条件を調べるときには，本質的に重要である（**III** 章）。

曲線 $y = y_0(x)$ が $v\big(y(x)\big)$ に極値をとらせるものであれば

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\big(y_0(x) + \alpha\,\delta y\big)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

であるのみならず

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\big(y(x, \alpha)\big)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

でもあるということに注意しなければならない。ここで $y(x,\alpha)$ は汎関数の変関数として許された関数であって，$\alpha=0$ および $\alpha=1$ に対して，それぞれ $y_0(x), y_0(x)+\delta y$ になるような任意の曲線族である。事実，$y(x,\alpha)$ は α の関数であって，α を指定すると曲線族，$y(x,\alpha)$ の一つの曲線が定められ，それゆえ汎関数 $v\big(y(x,\alpha)\big)$ の一つの値が決定される。

$y_0(x)$ は $v\big(y(x)\big)$ に極値をとらせるから，この関数*もまた $\alpha=0$ において極値をもち，それゆえその導関数は $\alpha=0$ において 0 になる。[1]

その結果

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}v\big(y(x,\alpha)\big)\Big|_{\alpha=0}=0$$

が得られる。しかしいま示したように，この導関数は汎関数の極値を与える曲線において，変分 δv と共に 0 にはなるけれども，一般にはこの導関数は汎関数の変分とは一致しない。

この節のすべての定義は，基本的な定理（11頁）とともに，ほとんど変更なしに，いくつかの独立な関数を含む汎関数

$$v\big(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\big)$$

あるいは，一つあるいはいくつかの多変数関数を含む汎関数

$$v\big(z(x_1, x_2, \dots, x_n)\big),$$

$$v\big(z_1(x_1, x_2, \dots, x_n), z_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, z_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$$

の場合に拡張することができる。たとえば，汎関数 $v\big(z(x,y)\big)$ の変分 δv は，増分

$$\Delta v=v\big(z(x,y)+\delta z\big)-v\big(z(x,y)\big)$$

の線形主要部，すなわち δz に関して線形の部分として，あるいはパラメーター α に関する導関数の α の初期値に対する値

---

* $v(y(x,\alpha))$ を α の関数とみている。

(1) α は $\alpha=0$ のある近傍の任意の値をとることができ，また $\dfrac{\partial v\big(y(x,\alpha)\big)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$ は存在するものと仮定している。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\bigl(z(x, y)+\alpha\,\delta z\bigr)\Big|_{\alpha=0}$$

の，いずれかによって定義することができる。もし $z=z(x, y)$ が，汎関数 v に極値をとらせるならば，$z=z(x, y)$ において $\delta v=0$ である。なぜなら，$v\bigl(z(x, y)+\alpha\,\delta z\bigr)$ は α の関数であって，すぐ上でした仮定によって $\alpha=0$ において極値をとり，それゆえ α に関する導関数は $\alpha=0$ において，0になるからである。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\bigl(z(x, y)+\alpha\,\delta z\bigr)\Big|_{\alpha=0}=0 \quad \text{すなわち} \quad \delta v=0$$

である。

2. オイラーの方程式

最も簡単な形をした汎関数

$$\text{(1)} \qquad v\bigl(y(x)\bigr)=\int_{x_0}^{x_1} F\bigl(x, y(x), y'(x)\bigr)\,dx$$

の極値を調べてみよう。ここで汎関数の変関数として許される曲線 $y(x)$ の端点 $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ は固定されているものとする（図 6)。また，関数 $F(x, y, y')$ の三階の導関数が存在すると仮定する。

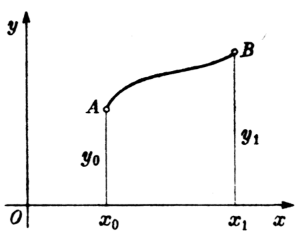


図 6.

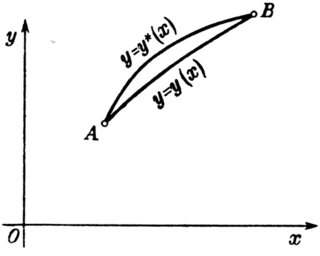


図 7.

われわれはすでに汎関数の極値に対する必要条件は，その変分が $\mathbf{0}$ になることであることを知っている。つぎにこの基本定理がいま問題にしている汎関数に対して，どのように適用されるかを示そう。極値は，二階導関数をもつ曲線 $y=y(x)$ において生じると仮定しよう。($y=y(x)$ が一階導関数をもつことだけを仮定すれば，この曲線が v に極値をとらせるものであることを用いて，二階導関数も存在することが他の方法で証明できる。) $y=y(x)$ に隣接する許された曲線のどれか一つをとって $y=y^*(x)$ とし，一つのパラメーター α を含む曲線族

$$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\big(y^*(x)-y(x)\big)$$

をつくろう。この曲線族は $y=y(x)$，および $y=y^*(x)$ を含んでいる。すなわち $\alpha=0$ のときには $y=y(x)$ であり，$\alpha=1$ のときには $y=y^*(x)$ である（図 7)。すでに知っているように，差 $y^*(x)-y(x)$ は**関数 $y(x)$ の変分**とよばれ，δy と書かれる。変分 δy は変分問題において，独立変数の増分 Δx が，通常の関数 $f(x)$ の極値を調べるときに演ずるのと同じ役割を演ずる。変分 $\delta y=y^*(x)-y(x)$ は x の関数であって，この関数は一回またはそれ以上微分することができ，$(\delta y)'=y^{*\prime}(x)-y'(x)=\delta y'$ となる。すなわち，変分の導関数は導関数の変分に等しい。同じように

$$(\delta y)''=y^{*\prime\prime}(x)-y''(x)=\delta y''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\delta y)^{(k)}=y^{*(k)}(x)-y^{(k)}(x)=\delta y^{(k)}$$

である。

さて曲線族 $y=y(x,\alpha)$ あるいは $y=y(x)+\alpha\,\delta y$ を考えよう。これは $\alpha=0$ に対しては汎関数に極値をとらせる曲線になり，また $\alpha=1$ に対しては，$y=y(x)$ に隣接するある許された曲線，いわゆる**比較曲線**(***comparison curve***) に移る。

もし，曲線族 $y=y(x,\alpha)$ において汎関数

$$v\big(y(x)\big)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

がとる値だけを考えるならば，変数 α の一つの関数

$$v(y(x, \alpha)) = \varphi(\alpha)$$

が得られる。なぜなら，この例では，汎関数の値はパラメーター α の選び方だけに依存して決まるからである。$\alpha = 0$ に対しては $y = y(x)$ となるから，$\alpha = 0$ に対してこの関数は，隣接する許された曲線に関して，したがって特に曲線族 $y = y(x, \alpha)$ の中の隣接する曲線に関して極値をとる，ということが導かれる。よく知られているように，関数 $\varphi(\alpha)$ が $\alpha = 0$ に対して極値をもつための必要条件は，$\alpha = 0$ に対してその導関数が 0 になることである。すなわち

$$\varphi'(0) = 0$$

ところで

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)\right) dx$$

であるから

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha)\right] dx$$

となる。ここに

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F\left(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\right)$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F\left(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\right)$$

である。関係式

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(y(x) + \alpha \delta y\right) = \delta y$$

および，

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\big(y'(x) + \alpha\, \delta y'\big) = \delta y'$$

によって，つぎの式が導かれる：

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \big[F_y\big(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\big)\,\delta y +$$
$$+ F_{y'}\big(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\big)\,\delta y'\big]\,dx$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \big[F_y\big(x, y(x), y'(x)\big)\,\delta y + F_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\,\delta y'\big]\,dx$$

すでに注意したように，$\varphi'(0)$ は汎関数 の変分とよばれ δv と書かれる。汎関数 v が極値をとるための必要条件は，その変分が 0 になること，すなわち $\delta v = 0$ である。
それゆえ汎関数

$$v\big(y(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

の場合には，この条件は

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,dx = 0$$

となる。

第二項を部分積分し，$\delta y' = (\delta y)'$ であることを思い出せば

$$\delta v = [F_{y'}\,\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y\, dx$$

が得られる。すべての許される曲線は，固定された端点を通るから

$$\delta y|_{x=x_0}=y^*(x_0)-y(x_0)=0$$

および

$$\delta y|_{x=x_1}=y^*(x_1)-y(x_1)=0$$

であることがわかるから，結局

$$\delta v=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx$$

となる。それゆえ，極値に対する必要条件はつぎの形をとる：

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx=0 \tag{2}$$

ここで，v を極値にするような曲線 $y=y(x)$ においてとられる第一因子 $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}$ は，ある連続関数であり，また比較関数 $y^*(x)$ は任意に選んでよいから，第二因子 δy は，ある一般的条件だけにしたがう任意の関数であってよい。この一般的条件というのは，関数 δy は，端点 $x=x_0, x=x_1$ で 0 になり，連続であってしかも一階あるいは，もっと高階の導関数をもち，絶対値 $|\delta y|$ が小さいか，あるいは，絶対値 $|\delta y|$ と，第一次導関数の絶対値 $|\delta y'|$ の両方が，小さくなければならないというようなものである。

条件式 (2) を，もっと簡単にするためには，つぎの補題が有用である：

変分法の基本補題：関数 $\Phi(x)$ が区間 (x_0, x_1) において連続であって，ある一般的ないくつかの条件だけに，したがう任意の関数 $\eta(x)$ に対して

$$\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta(x)\,dx=0$$

が成り立つならば，区間 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 全体で $\Phi(x)\equiv 0$ である。その一般的な条件とはたとえば，$\eta(x)$ は一階あるいは，それ以上の高階微分が可能な

関数であり，またη(x)は端点 x_0, x_1 で 0 になり，しかも $|\eta(x)| < \varepsilon$ あるいは，$|\eta(x)| < \varepsilon$ と $|\eta'(x)| < \varepsilon$ の両方が成り立たなければならないというような条件である。

〔証明〕区間 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ の一点 $x = x^*$ において，$\Phi(x^*) \neq 0$ であると仮定しよう。そしてこの仮定が矛盾に導くことを示す。実際，$\Phi(x)$ は連続であって $\Phi(x) \neq 0$ であるから，x^* の近傍で，その中全体を通じて $\Phi(x)$ が定まった符号をもつようなものがある。それを $x_0^* \leqslant x \leqslant x_1^*$ とする。さて，関数 $\eta(x)$ として，やはりこの近傍で定符号をもち，それ以外では，0 になるようなものを選ぶならば（図 8），

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{x_0^*}^{x_1^*} \Phi(x)\eta(x)dx \neq 0$$

となる。なぜなら $\Phi(x)\eta(x)$ は区間 $x_0^* \leqslant x \leqslant x_1^*$ を通じて一定符号をもち，外部では 0 になるからである。

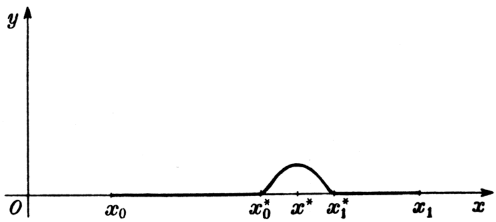


図　8.

それゆえ，矛盾が得られたことになり，$\Phi(x) \equiv 0$ が証明された。関数 $\eta(x)$ としては，たとえば，つぎのような関数を選ぶことができる：

区間 $x_0^* \leqslant x \leqslant x_1^*$ の上では

$$\eta(x) = k(x - x_0^*)^{2n}(x - x_1^*)^{2n}$$

外部では　$\eta(x) = 0$

ここで n はある正の整数であり，k は定数である。もちろんこの関数は補題の条件を満足する。すなわち，この $\eta(x)$ は $2n-1$ 階までのすべて連続な導関数をもち，端点 x_0, x_1 で 0 になり，かつその絶対値も，その導関数の絶対値もともに，係数 k の絶対値を十分小さく選ぶことによって，いくらでも小さくすることができる。

注意：同じようにして，関数 $\Phi(x, y)$ が x, y 平面上の領域 D で連続であり，またある一般的な条件だけを満足するように任意に選ばれたすべての関数 $\eta(x, y)$ に対して，$\iint_D \Phi(x, y)\eta(x, y)\,dx\,dy = 0$ であれば，領域 D において $\Phi(x, y) \equiv 0$ であることを証明することができる。この一般的な条件というのは，たとえば，$\eta(x, y)$ は連続で，一階あるいはもっと高階の導関数をもち，D の境界で 0 になり，かつ $|\eta| < \varepsilon$, $|\eta'_x| < \varepsilon$, $|\eta'_y| < \varepsilon$ でなければならないというようなものである。一例として，基本補題の証明において，関数 $\eta(x, y)$ の一つをつぎのように定義することができる。すなわち，$\Phi(x^*, y^*) \neq 0$ であるような一つの点 (x^*, y^*) を中心とし，十分小さい半径 ε_1 の円の内部では，

$$\eta(x, y) = k\left((x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 - \varepsilon_1^2\right)^{2n}$$

であって，D の残りの領域では

$$\eta(x, y) \equiv 0$$

とすればよい（図 9）。

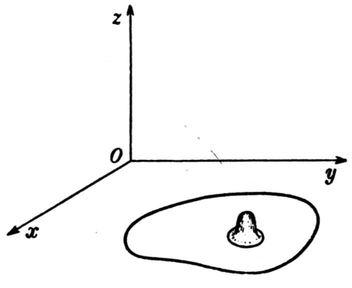


図　9.

さて，基本補題を適用して，条件

(2) $$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx=0$$

を簡単化しよう。これは最も初等的な形の汎関数 (1) の極値に対する条件であった。補題のすべての条件は満足されている。すなわち，極値を与える曲線 $y=y(x)$ において，因子 $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}$ は連続関数であり，δy はわれわれが補題で考察した一般的なある制限をうける任意の関数である。したがって，汎関数 v を極値にするような曲線において，$F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}\equiv 0$ であることがわかる。すなわち，$y=y(x)$ は二階の微分方程式

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

あるいは，微分を実行した形に書いて

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0$$

の一つの解である。

この方程式は **1744** 年に初めて，この方程式を得たオイラーにちなんで，**オイラーの方程式** (*Euler equation*) とよばれている。オイラーの方程式の積分曲線 $y=y(x,C_1,C_2)$ は，**極値曲線** (*extremal*)*とよばれる。極値曲線だけが，汎関数

$$v(y(x))=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

に極値をとらせることができる。

汎関数 (1) を極値にするような曲線を見出すためには，オイラーの方程式を解いて，この方程式の一般解に含まれている任意定数を，端点における条件 $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$ を用いて決定しなければならない。これらの条件を満足するような極値曲線だけが，汎関数に極値を与えることができる。しかし

* 停留曲線(stationary curve)ともいわれる。

ながら，それらが実際に極値を与えることを確かめ，また極値曲線のうちの，どれが極大を与え，どれが極小を与えるかを調べるためには，III 章でのべる極値に対する十分条件にたよらなければならない。

例題 1. 汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - y^2)\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\tfrac{1}{2}\pi) = 1$$

に極値をとらせるのはどのような曲線であるか。

オイラーの方程式は $y'' + y = 0$ で，これは一般解 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ をもっている。端点の条件を使うと，$C_1 = 0, C_2 = 1$ が得られる。したがって，$y = \sin x$ という曲線だけが，極値を与える。

例題 2. どのような曲線が，つぎの汎関数を極値にすることができるか。

$$v(y(x)) = \int_0^1 ((y')^2 + 12xy)\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

オイラーの方程式は $y'' - 6x = 0$ で，それゆえ $y = x^3 + C_1 x + C_2$ である。境界条件から $C_1 = 0, C_2 = 0$ が得られ，それゆえ極値は曲線 $y = x^3$ においてのみ，生じることができる。

これら二つの例題ではオイラーの方程式を解くことは非常に容易であったが，これは決して一般にいえることではない。なぜなら，二階の微分方程式が初等関数で積分できるのは，例外的な場合においてだけだからである。つぎにわれわれは，オイラーの方程式が積分できるいくつかの簡単な例を考えよう。

(1) 関数 F が y' を含まない場合

$$F = F(x, y)$$

$F_{y'} \equiv 0$ であるから，オイラーの方程式は $F_y(x, y) = 0$ となる。方程式 $F_y(x, y) = 0$ の解は任意定数を含まないから，一般に境界条件 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ を満足しない。

したがって，そのような変分問題は一般に解をもたない。曲線

$$F_y(x, y) = 0$$

が端点(x_0, y_0)と(x_1, y_1)を通っているという例外的な場合にのみ，極値を与えることのできる曲線が存在する。

例題 3. どのような曲線が，つぎの汎関数を極値にすることができるか。

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1$$

オイラーの方程式は$F_y = 0$，すなわち$y = 0$である。極値曲線$y = 0$は$y_0 = 0$，$y_1 = 0$に対してのみ端点を通る（図**10**）。それゆえ，もし$y_0 = 0$, $y_1 = 0$であるならば，関数$y = 0$は汎関数$v = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$を極小にする。なぜなら，$v(y(x)) \geqq 0$であって$y = 0$のとき$v = 0$になるからである。$y_0$，あるいは$y_1$の値のうちの一つが0でないときでも，この汎関数を極小にするような連続曲線は存在しない。このことはむしろ明らかである。なぜなら，つぎのような連続関数列を選ぶことができる。すなわち点(x_0, y_0)から出発して，x-軸に向かって近づき，つぎにx-軸に沿うて点$(x_1, 0)$に近づくが，極限点x_1に到達するすぐ前で，ふたたび上昇して点(x_1, y_1)に終るような曲線であって，下降および上昇の傾きが，つぎつぎに大きくなっていくような連続関数列である（図**11**）。そのような関数列の表わす曲線において，汎関数の値はいくらでも小さくなり，したがって汎関数の最大下界（下限）は0であることは明らかである。しかしながら，この値0は連続関数においては達せられない。なぜなら，恒等的に0でないどのような連続関数$y = y(x)$に対しても積分は$\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx > 0$だからである。汎関数の値のこの最大下界は方程式

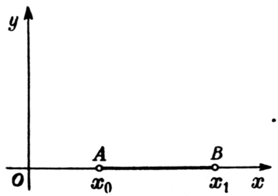


図 10.

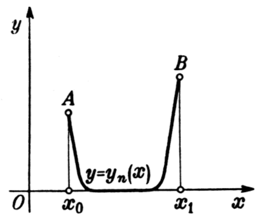


図 11.

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y(x) = 0, \quad (x_0 < x < x_1 \quad \text{に対して})$$
$$y(x_1) = y_1$$

で与えられる曲線において達せられるが，この曲線は連続でない（図**12**）。

(2) 関数 F が y' について一次の場合

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$$

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1}\left(M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx}\right)dx$$

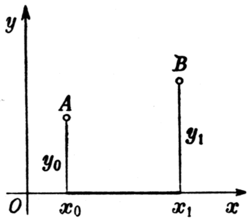


図 12.

オイラーの方程式は

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y' - \frac{d}{dx}N(x, y) = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}y' = 0$$

あるいは

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

となる。この場合も前のときと同じように，これは単に一つの関数恒等式であって微分方程式ではない。曲線

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

は一般には境界条件を満足しないから，そのような変分問題は連続関数の範囲では，一般に解をもたない。もし

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$$

であるなら，そのときには $M\,dx + N\,dy$ は完全微分であって

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left(M + N\frac{dy}{dx}\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} (M\,dx + N\,dy)$$

は積分の径路には無関係となり，それゆえ汎関数は許されるすべての曲線において，同じ定数値をもつ。このときには，変分の問題は興味がない。

例題　4.　どのような曲線が，つぎの汎関数を極値にすることができるか。

$$v(y(x)) = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = a$$

オイラーの方程式は

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \qquad \text{あるいは} \qquad y - x = 0$$

である。第一の境界条件 $y(0) = 0$ は満たされているが第二の条件は $a = 1$ に対してのみ満たされる。 それゆえ $a \neq 1$ ならば，これらの境界条件を満足する極値曲線は存在しない。

例題　5.　どのような曲線が，つぎの汎関数を極値にすることができるか。

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy')\,dx \qquad \text{あるいは} \qquad v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y\,dx + x\,dy)$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1$$

オイラーの方程式は恒等式 $1\equiv 1$ となる。被積分関数は完全微分であって，それゆえ積分

$$v(y(x))=\int_{x_0}^{x_1} d(xy)=x_1y_1-x_0y_0$$

は積分路にはよらない。変分の問題はこのときには興味のないものになる。

(3) 関数 F が y' だけを含む場合

$$F=F(y')$$

$F_y=F_{xy'}=F_{yy'}=0$ だから，オイラーの方程式は $F_{y'y'}y''=0$ である。それゆえ $y''=0$ かあるいは $F_{y'y'}=0$ である。もし $y''=0$ であれば，$y=C_1x+C_2$ であって，これは 2-パラメーターの直線群である。もし方程式 $F_{y'y'}(y')=0$ が一つ，あるいはそれ以上の実根 $y'=k_i$ をもつならば $y=k_ix+C$ であって，これはすぐ上に導いた。2-パラメーターの直線群の方程式 $y=C_1x+C_2$ に含まれる 1-パラメーターの直線群である。それゆえ，$F=F(y')$ の場合には，極値曲線は任意の直線 $y=C_1x+C_2$ である。

例題 6. 曲線の長さ

$$l(y(x))=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

の場合には，極値曲線はすべての直線 $y=C_1x+C_2$ である。

例題 7. $t(y(x))$ を，一つの粒子が点 $A(x_0, y_0)$ から，他の点 $B(x_1, y_1)$ まで，ある曲線 $y=y(x)$ に沿うて速さ $ds/dt=v(y')$ で動くのに要する時間とする。もしこの速さが y' のみに関係するなら，t はつぎの形の汎関数である：

$$t(y(x))=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}dx,$$

なぜなら

$$\frac{ds}{dt}=v(y'),\qquad dt=\frac{ds}{v(y')}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{v(y')},\qquad t=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}dx$$

だからである。したがって，この汎関数の極値曲線は直線群である。

(4) 関数 F が x と y' だけを含む場合

$$F = F(x, y')$$

オイラーの方程式

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$$

は積分曲線 $F_{y'}(x, y') = C_1$ をもっている。そして，この一階の微分方程式 $F_{y'}(x, y') = C_1$ は y を含まないから，y' について解くか，あるいは適当なパラメーターを導入して解くことができる。

例題 8. 汎関数

$$t(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$$

は，一個の粒子が一点から他の点へ曲線 $y = y(x)$ に沿うて，速さ $v = x$ で動くときに要する時間である。なぜなら $ds/dt = x$ ならば $dt = ds/x$ であって

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$$

となるからである。オイラーの方程式の第一積分 $F_{y'} = C_1$ は，$y'/x\sqrt{1+y'^2} = C_1$ の形をもっている。この方程式を解くもっとも簡単な方法は，$y' = \tan t$ とおいてパラメーター t を導入することである。そうすると

$$x = \frac{1}{C_1}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1}\sin t$$

すなわち $x = C_1^* \sin t$ となる。ここに $C_1^* = 1/C_1$ である。

$$\frac{dy}{dx} = \tan t, \quad dy = \tan t\,dx = \tan t\cdot C_1^* \cos t\,dt = C_1^* \sin t\,dt$$

であるから，積分して $y=-C_1^*\cos t+C_2$ が得られる。それゆえ

$$x=C_1^*\sin t,\quad y-C_2=-C_1^*\cos t$$

となる。あるいは t を消去すれば $x^2+(y-C_2)^2=C_1^{*2}$ となる。これは y-軸上に中心をもつすべての円である。

(5) 関数 F が y と y' だけを含む場合

$$F=F(y,y')$$

$F_{xy'}=0$ であるから，オイラーの方程式は

$$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0$$

となる。両辺に y' をかけると，上の式の左辺は完全導関数 $d(F-y'F_{y'})/dx$ になる。事実

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=F_yy'+F_{y'}y''-y''F_{y'}-F_{yy'}y'^2-$$
$$-F_{y'y'}y'y''=y'(F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y'')$$

である。したがって，オイラーの方程式は第一積分

$$F-y'F_{y'}=C_1$$

をもつ。この一階微分方程式は x を陽に含まないから，y' について解いて，変数分離をするか，あるいはパラメーターを導入することによって解くことができる。

例題 9. 最小回転面（minimum surface of revolution）の問題 与えられた端点をもつ曲線を，x-軸のまわりに回転したときに，最小の表面積が得られるような曲線を決定すること（図 13）。

よく知られているように，回転面の表面積は

$$S(y(x))=2\pi\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

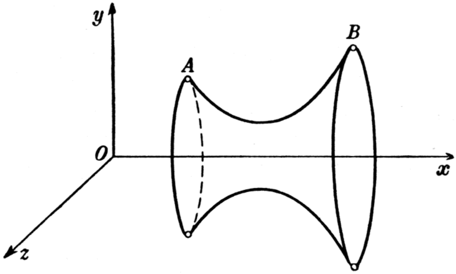


図　13.

で与えられる。被積分関数は y と y' のみに関係するから，そのオイラーの方程式はつぎの形の第一積分をもつ：

$$F - y'F_{y'} = C_1$$

すなわち，この場合には

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

となる。一般解を見出すもっとも簡単な方法は，パラメーター $y' = \sinh t$ を導入することである。そうすると，上の式に代入すれば $y = C_1 \cosh t$ となって

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sinh t\, dt}{\sinh t} = C_1 dt, \quad x = C_1 t + C_2$$

が得られる。それゆえ，求める曲面は，パラメーター表示で表わされた曲線

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = C_1 \cosh t$$

を回転することによって得られる。

パラメーター t を消去すると

$$y = C_1 \cosh \frac{x - C_2}{C_1}$$

となるが，これは懸垂線（*catenary*）群である。懸垂線を回転することによって生ずる曲線は，カテノイド（*catenoid*）とよばれる。定数 C_1, C_2 は，問題の解を与える曲線が，

与えられた端点を通らなければならないという条件から，決められるものである。

例題 10．最速降下線の問題（The brachistochrone problem）（2 頁を見よ）。粒子が点 A から出発して，ある曲線に沿うて点 B まで動く。媒質の摩擦や抵抗を無視した場合，最も短い時間で A から B に到達するような曲線の形を見出せ。

座標系の原点を点 A にとり，x-軸を水平に，y-軸を鉛直下向きにとる。粒子の速さは $ds/dt = \sqrt{2gy}$ であり，それゆえこの粒子が $A(0, 0)$ から出発して，$B(x_1, y_1)$ に到達するのに要する時間は

$$t(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(x_1) = y_1$$

である。この汎関数はもっとも簡単な形をしており，被積分関数は x を陽に含まないから，オイラーの方程式は第一積分 $F - y'F_{y'} = C$ をもつ。いまの場合には，これは

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

であって，結局 $1/\sqrt{y(1+y'^2)} = C$ すなわち，$y(1+y'^2) = C_1$ となる。$y' = \cot t$ とおいてパラメーターを導入すれば

$$y = \frac{C_1}{1+\cot^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t),$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t\, dt}{\cot t} = 2C_1 \sin^2 t\, dt = C_1(1-\cos 2t)\,dt,$$

$$x = C_1\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2$$

が得られる。その結果，曲線の方程式は，パラメーター表示で

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \qquad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t)$$

となる。さて，$x = 0$ に対して $y = 0$ であるから $C_2 = 0$ になることに注意し，$2t = t_1$ とおいてパラメーターを変換すれば，通常の形のサイクロイド（cycloid）の群

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \qquad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos t_1)$$

が得られる。ここに $C_1/2$ は転がる円の半径であって，これはサイクロイドが点 $B(x_1, y_1)$ を通らなければならないという条件から，決定することができる。それゆえ，最速降下線はサイクロイドであることがわかった。

3. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$ の形の汎関数

もっと一般的な形の汎関数

$$v(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

が，そのすべての関数に対して指定された境界値

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{10}, \quad & y_2(x_0) &= y_{20}, \quad & \ldots, \quad & y_n(x_0) = y_{n0}, \\ y_1(x_1) &= y_{11}, \quad & y_2(x_1) &= y_{21}, \quad & \ldots, \quad & y_n(x_1) = y_{n1}, \end{aligned}$$

の下で，極値をとるための必要条件を得るために，われわれは一度に関数の一つ

$$y_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

だけを変化させ，他のすべての関数は固定したままにしておこう。このようにすれば，汎関数 $v(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ はただ一つの変化する関数，たとえば $y_i(x)$ だけに関係する汎関数

$$v(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \tilde{v}(y_i)$$

になる。この型の汎関数は 2 節で考察したものであって，それゆえ，この汎関数を極値にする関数は，オイラーの方程式

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0$$

を満足しなければならない。この議論は，おのおのの関数 $y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ に対して適用されるから，二階の微分方程式系

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0, \quad i=1,2,\ldots,n$$

が得られる。これは，一般に $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ 空間の中に，積分曲線の $2n$-パラメーター群を決定する。これが与えられた変分問題に対する極値曲線群である。

特に，汎関数が二つの関数 $y(x)$，$z(x)$ だけに依存するならば

$$v\big(y(x), z(x)\big)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$$

$$y(x_0)=y_0, \quad z(x_0)=z_0, \quad y(x_1)=y_1, \quad z(x_1)=z_1$$

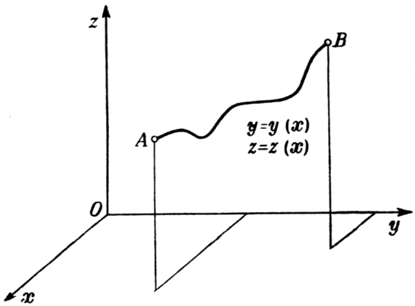


図 14.

であって，空間曲線 $y=y(x)$, $z=z(x)$ がこの汎関数の値を決定する（図 14）。そこで，$z(x)$ は固定したままで $y(x)$ だけをかえると，われわれは空間曲線を，x, z-平面への射影を固定したままで動かすことになる。したがって，空間曲線自身は，この変化の過程を通じて柱面 $z=z(x)$ の上にある(図 15)。

同じように，$y(x)$ を固定して $z(x)$ を変えると，空間曲線は，その変化の過程を通じて柱面 $y=y(x)$ の上にあるように保たれたままで変化する。そのようにすることによって，われわれはつぎの二つのオイラーの方程式系を得る：

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \quad \text{および} \quad F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$

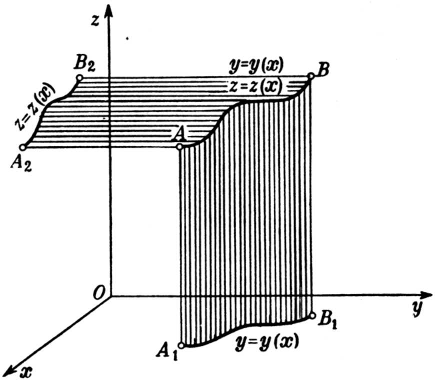


図 15.

例題 1. つぎの汎関数の極値曲線を求めよ。

$$v\big(y(x), z(x)\big) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\,dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(\pi/2) = -1$$

オイラーの方程式系は

$$y'' - z = 0, \quad z'' - y = 0$$

である。未知関数の一つ，たとえば z を消去すると，$y^{\text{iv}} - y = 0$ が得られる。これは定数係数の線形方程式で，その解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$z = y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

である。境界条件から

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1$$

が得られ，結局

$$y = \sin x, \quad z = -\sin x$$

が求める極値曲線である。

例題 2. 汎関数

$$v\big(y(x),\, z(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} F(y',\, z')\, dx$$

の極値曲線を求めよ。

オイラーの方程式系は

$$F_{y'y'}y'' + F_{y'z'}z'' = 0, \quad F_{y'z'}y'' + F_{z'z'}z'' = 0$$

である。それゆえ，$F_{y'y'}F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$ と仮定すれば，$y'' = 0$，$z'' = 0$ すなわち，$y = C_1 x + C_2$，$z = C_3 x + C_4$ が得られる。これは空間における直線群である。

4. 高階の導関数を含む汎関数

われわれはつぎに，汎関数

$$v\big(y(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x),\, y'(x),\, \ldots,\, y^{(n)}(x)\big)\, dx$$

の極値を調べよう。ここに関数 F はそのすべての変数について $n+2$ 階の偏導関数をもつとする。また境界条件はつぎの形であると仮定する：

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \quad & y'(x_0) &= y_0', \quad & \ldots, \quad & y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \\ y(x_1) &= y_1, \quad & y'(x_1) &= y_1', \quad & \ldots, \quad & y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \end{aligned}$$

すなわち，端点において，許された関数が指定された値をとるだけでなく，その $n-1$ 階までの導関数もまた，指定された値をとるものと仮定するのである。ある $2n$ 回微分可能な曲線 $y = y(x)$ が極値を与えるものとし，$y = y^*(x)$ をやはり $2n$ 回微分可能なある比較曲線とする。

つぎのような 1-パラメーターの関数族を考えよう：

$$y(x,\, \alpha) = y(x) + \alpha\big(y^*(x) - y(x)\big)$$

あるいは

$$y(x,\, \alpha) = y(x) + \alpha\, \delta y$$

$\alpha=0$ に対して $y(x,\alpha)=y(x)$ であり，$\alpha=1$ に対して $y(x,\alpha)=y^*(x)$ である。曲線族 $y=y(x,\alpha)$ だけを考え，それにおいて汎関数 $v\big(y(x)\big)$ のとる値を考えるならば，この汎関数は $\alpha=0$ において極値をもつようなパラメーター α の通常の関数になる。したがって

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}v\big(y(x,\alpha)\big)\Big|_{\alpha=0}=0$$

である。1 節のように，この導関数は汎関数 v の変分とよばれ，δv と書かれる。すなわち

$$\delta v=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1}F\big(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha),\ldots,y^{(n)}(x,\alpha)\big)dx\right]_{\alpha=0}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\,\delta y+F_{y'}\,\delta y'+F_{y''}\,\delta y''+\ldots+F_{y^{(n)}}\,\delta y^{(n)})\,dx$$

右辺の第 2 項を部分積分すると

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\,\delta y'\,dx=[F_{y'}\,\delta y]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}F_{y'}\,\delta y\,dx$$

が得られる。同じように，第 3 項を二回部分積分すると

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y''}\,\delta y''\,dx=[F_{y''}\,\delta y']_{x_0}^{x_1}-\left[\frac{d}{dx}F_{y''}\,\delta y\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\,\delta y\,dx$$

となり，以下同様にして，最後の項を n 回部分積分すれば

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y^{(n)}}\,\delta y^{(n)}\,dx=[F_{y^{(n)}}\,\delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1}-$$

$$-\left[\frac{d}{dx}F_{y^{(n)}}\,\delta y^{(n-2)}\right]_{x_0}^{x_1}+\ldots+(-1)^n\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\,\delta y\,dx$$

が得られる。端点 $x = x_0$, $y = y_0$, $x = x_1$, $y = y_1$ は固定されており，したがって，これらの点でとられるすべての変分は 0 であること，すなわち x_0, x_1 において $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \ldots = \delta y^{(n-1)} = 0$ を思い出せば，最後につぎの式が得られる：

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} F_{y'''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y \, dx$$

極値を与える曲線において，任意の δy に対して

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y \, dx = 0$$

が成り立ち，また 被積分関数の第一因子は $y = y(x)$ において一つの 連続関数であるから，基本補題によって，この第一因子は 0 でなければ ならないことが導かれる。すなわち

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0$$

それゆえ，汎関数

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) \, dx$$

の極値を与えるどのような関数も，方程式

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^{(n)} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

を満足しなければならない。この $2n$ 階の微分方程式は，**オイラー・ポアソンの方程式**（*Euler-Poisson equation*）とよばれ，この方程式の積分曲線はこの変分問題の**極値曲線**とよばれる。この方程式の一般解は $2n$ 個の任意定数を含み，それらの値は一般に $2n$ 個の境界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y_1', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}$$

から決定することができる。

例題　1.　汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^1 (1 + y''^2)\,dx$$

の，境界条件

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$$

を満足する極値曲線を求めよ。

オイラー・ポアソンの方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$

すなわち $y^{\mathrm{iv}} = 0$ である。一般解は

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

である。境界条件から

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0$$

が得られる。それゆえ極値は直線 $y = x$ においてのみとられることができる。

例題　2.　汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + x^2)\,dx$$

の，境界条件

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = -1$$

を満足する極値曲線を求めよ。

オイラー・ポアソンの方程式は $y^{\mathrm{iv}}-y=0$ である。この微分方程式の一般解は，$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$ である。境界条件から，$C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=1,\ C_4=0$ が得られる。それゆえ，曲線 $y=\cos x$ においてのみ極値をとることができる。

例題 3. 汎関数

$$v(y(x))=\int_{-l}^{l}\left(\tfrac{1}{2}\mu y''^2+\varrho y\right)dx$$

の，境界条件

$$y(-l)=0,\quad y'(-l)=0,\quad y(l)=0,\quad y'(l)=0$$

を満足する極値曲線を求めよ。

この変分問題は，両端が固定された弾性体の柱状の梁の，曲げの研究に現われるものである。梁が一様であれば ϱ と μ は定数であって，オイラー・ポアソンの方程式は

$$\varrho+\frac{d^2}{dx^2}(\mu y'')=0 \quad \text{すなわち} \quad y^{\mathrm{iv}}=-\frac{\varrho}{\mu}$$

となり，それゆえ

$$y=-\frac{\varrho x^4}{24\mu}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$$

である。境界条件を使えば，最後に

$$y=-\frac{\varrho}{24\mu}(x^4-2l^2x^2+l^4) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{\varrho}{24\mu}(x^2-l^2)^2$$

が得られる。

もし汎関数 v が

$$v(y(x),z(x))=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\ldots,y^{(n)},z,z',\ldots,z^{(m)})\,dx$$

の形をもつならば，$z(x)$ を固定して $y(x)$ だけを変化させると，最後に，この汎関数に極値を与えるような関数のどのような組，$y(x)$，$z(x)$ も，オイラー・ポアソンの方程式

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0$$

を満たさねばならず，また $y(x)$ を固定して $z(x)$ を変化させると，これら両方の関数は方程式

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\dots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0$$

をも満足しなければならないという結果を得る。

したがって，関数 $z(x)$ と $y(x)$ は二つの方程式系

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0$$

および

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\dots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0$$

を満足しなければならない。

同様な議論は任意個数の関数を含む同じような汎関数

$$v(y_1,y_2,\dots,y_m)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n_1)},y_2,y_2',\dots,$$
$$y_2^{(n_2)},\dots,y_m,y_m',\dots,y_m^{(n_m)})\,dx$$

の極値の議論に対しても適用される。すなわちどれか一つの関数 $y_i(x)$ だけを変化させ，残りの関数を固定しておくと，極値に対する基本的な必要条件は

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}+\dots+(-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}}=0$$

$$(i=1,2,\dots,m)$$

であることが見出される。

5. 数個の独立変数を含む関数に依存する汎関数

つぎに，汎関数

$$v\left(z(x, y)\right) = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

の極値を調べよう。ここに，領域 D の境界 C 上での関数 $z(x, y)$ の値は指定されているものとする。すなわち，空間内に一つの曲線 C^* が与えられていて，すべての許される曲面はこの曲線を通るものと仮定するのである(図**16**)。$\partial z/\partial x = p$ $\partial z/\partial y = q$ と書くことにする。関数 F は微分可能であり，また極値を与える曲面 $z = z(x, y)$ は二回微分可能であるとする。

1-パラメーターの曲面族 $z = z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha\,\delta z$ を考える。ここで $\delta z = z^*(x, y) - z(x, y)$ である。$\alpha = 0$ に対しては，極値を与えると仮定された曲面 $z = z(x, y)$ が得られ，また $\alpha = 1$ に対しては，ある許された曲面 $z = z^*(x, y)$ が得られる。関数族 $z(x, y, \alpha)$ の上だけで考えた汎関数は，一変数 α の通常の関数になり，それは $\alpha = 0$ において，極値をもたなければならない。したがって

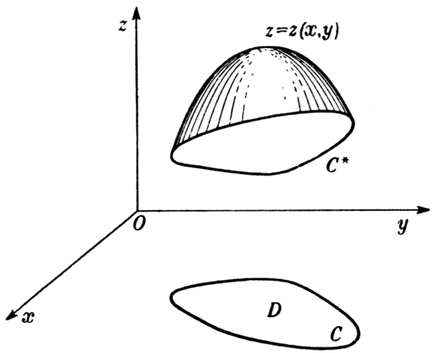


図 16.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\big(z(x, y, \alpha)\big)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

である。$\alpha = 0$ でとられた $v\big(z(x, y, \alpha)\big)$ の α に関する導関数を，その汎関数の変分とよんで δv で表わすならば，1 節におけると同様に

$$\delta v = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\iint_D F\big(x, y, z(x, y, \alpha), p(x, y, \alpha), q(x, y, \alpha)\big)\,dxdy\right]_{\alpha=0}$$
$$= \iint_D (F_z\,\delta z + F_p\,\delta p + F_q\,\delta q)\,dxdy$$

となる。ここに

$$z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha\,\delta z$$
$$p(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} = p(x, y) + \alpha\,\delta p$$
$$q(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} = q(x, y) + \alpha\,\delta q$$

である。さて

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\,\delta z\} = \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}\,\delta z + F_p\,\delta p$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\,\delta z\} = \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\,\delta z + F_q\,\delta q$$

だから，つぎの式が導かれる：

$$\iint_D (F_p\,\delta p + F_q\,\delta q)\,dxdy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\,\delta z\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\,\delta z\}\right]dxdy$$
$$-\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right]\delta z\,dxdy$$

ここに $\dfrac{\partial}{\partial x}\{F_p\}$ は，いわゆる x に関する全偏導関数 (*total* **partial derivative**) である。それを計算するときには， y は定数と考えるが，一方 z, p および q は x の関数と考える。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} = F_{px}+F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x}+F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x}+F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x}$$

また同じように

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = F_{qy}+F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y}+F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y}+F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}$$

である。グリーンの公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy = \int_C (N\,dy - M\,dx)$$

を用いれば

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\,\delta z\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\,\delta z\}\right]dxdy = \int_C (F_p\,dy - F_q\,dx)\,\delta z = 0$$

が得られる。この後の方の積分が0になるのは，すべての許された曲面が空間内の 同じ曲線を 通らなければ ならないので， C に沿うて $\delta z = 0$ になるからである。したがって

$$\iint_D [F_p\,\delta p + F_q\,\delta q]\,dxdy = -\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right]\delta z\,dxdy$$

となり，極値に対する必要条件

$$\iint_D (F_z\,\delta z + F_p\,\delta p + F_q\,\delta q)\,dxdy = 0$$

は，つぎに示す形となる：

$$\iint_D \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} \right) \delta z\, dx dy = 0$$

変分 δz は任意であり（δz は一般的な性格のある種の制限，たとえば連続性，微分可能性，境界の曲線上で 0，およびそれに類似の制限は受けている），また第一因子は連続であるから，基本補題（18 頁）から，つぎのことが導かれる。すなわち，曲面 $z = z(x, y)$ が極値を与えるならば

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} \equiv 0$$

でなければならない。それゆえ $z(x, y)$ は方程式

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = 0$$

の一つの解である。

極値を与える関数が満足しなければならないこの二階の偏微分方程式は**オストログラツキーの方程式**（*Ostrogradski equation*）とよばれる。この名称は 1834 年に最初にこの方程式を発見した有名なロシアの数学者 **M. B.** オストログラツキーにちなんでつけられたものである。この方程式はまたときには**オイラー・ラグランジュの方程式**（*Euler-Lagrange equation*）とよばれることもある。

例題 1.

$$v(z(x, y)) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy$$

境界条件は領域 D の境界 C 上で $z = f(x, y)$ とする。ここに $f(x, y)$ は境界 C 上であらかじめ与えられた関数である。

オストログラツキーの方程式は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

あるいは簡単に

$$\Delta z = 0$$

すなわち，よく知られたラプラス（**Laplace**）の方程式である。われわれは，D において連続で，D の境界上であらかじめ与えられた値をとるような，この方程式の解を見出さなければならない。これは数理物理学における基本的な問題の一つであって，**ディリクレの問題**（***Dirichlet problem***）とよばれる。

例題 2.

$$v(z(x, y)) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2zf(x, y)\right] dxdy$$

ここに，D の境界上で関数 z の値はあらかじめ与えられ，固定されている。

オストログラツキーの方程式は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

あるいは簡単に

$$\Delta z = f(x, y)$$

である。

この方程式は**ポアソンの方程式**（***Poisson equation***）とよばれ，これもまた数理物理学のいろいろな問題で，しばしば出会うものである。

例題 3. 空間において与えられた一つの閉曲線 C を通る最小（面積の）曲面を見出す問題は，汎関数

$$S(z(x, y)) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

の最小値を調べることに帰着される。

この問題に対応するオストログラツキーの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\} = 0$$

あるいは

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) - 2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) = 0$$

である。

汎関数

$$v(z(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$= \iint_D \cdots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

を考える。ここに $p_i = \partial z/\partial x_i$ である。この汎関数に対しては，極値の基本的な必要条件 $\delta v = 0$ から，オストログラッキーの方程式は

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\{F_{p_i}\} = 0$$

の形であることが導かれる。v を極値にするどのような関数

$$z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

も，この方程式を満足しなければならない。

たとえば，汎関数

$$v = \iiint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right) dxdydz$$

の場合には，オストログラッキーの方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

の形をもっている。

もし汎関数 v の被積分関数が，もっと高階の導関数を含むならば，オストログラッキーの方程式を導いたときと同じ議論を，つぎつぎに用いることによって，v を極値にするどのような関数もオイラー・ポアソンの方程式（36-37 頁）に似た一つの方程式を満足しなければならないということが見出される。

たとえば

$$v(z(x, y))=\iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dx dy$$

の場合には，つぎの方程式が得られる：

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{F_r\}+\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\{F_s\}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{F_t\}=0$$

ここに

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

である。v を極値にする関数はいずれも，この 4 階の偏微分方程式を満足しなければならない。たとえば

$$v=\iint_D\left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right) dx dy$$

の場合には，極値を与えるどのような関数も，いわゆる**重調和方程式**（*biharmonic equation*）

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=0$$

を満足しなければならない。この方程式は通常 $\Delta \Delta z=0$ と書かれる。

汎関数

$$v=\iint_D\left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2-2 z f(x, y)\right) dx dy$$

に対しては，極値を与えるどのような関数も方程式 $\Delta \Delta z=f(x, y)$ を満足しなければならない。

同じように，汎関数

$$v=\iint_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 dxdy$$

あるいは，もっと一般な汎関数

$$v=\iint_D\left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2-\right.$$
$$\left.-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy$$

の極値を見出す問題は，重調和方程式の研究に導くことになる。

6. 変分問題のパラメーター表示

多くの変分の問題では，パラメーター表示で解を求めるのがもっとも便利である。たとえば，与えられた長さ l の周囲をもち，最大の面積 S をかこむ閉曲線を見出す等周問題（3 頁）の場合がそうである。$y=y(x)$ の形の解を求めようと試みることは便利でない。なぜなら，そうすると，問題の性質そのものから，$y(x)$ は一価関数にならないからである（図 17）。それゆえ，解をパラメーター表示の形 $x=x(t)$, $y=y(t)$ の形で求めようとするのが，合理的である。したがって，この場合には，汎関数

$$S(x(t),y(t))=\frac{1}{2}\int_0^T(xy^{\cdot}-yx^{\cdot})\,dt$$

の極値を，付加条件 $l=\int_0^T\sqrt{x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}}\,dt$ の下で，見出さなければならない。ここに l は定数である。

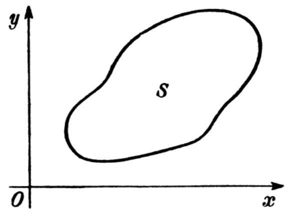


図 17.

汎関数

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

の極値を調べるのに，解をパラメーター表示の形 $x = x(t)$, $y = y(t)$ で求める方がよいことがわかったものとしよう。そのときには，汎関数はつぎの形になる：

$$v(x(t), y(t)) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{y^{\cdot}(t)}{x^{\cdot}(t)}\right) x^{\cdot}(t)\,dt$$

ここで変換された被積分関数

$$F\left(x(t), y(t), \frac{y^{\cdot}(t)}{x^{\cdot}(t)}\right) x^{\cdot}(t)$$

は t を陽に含まず，変数 $x^{\cdot}, y^{\cdot}$ に関する一次の同次関数であることに注意する。

したがって，汎関数 $v(x(t), y(t))$ は，二つの関数 $x(t)$ と $y(t)$ に関係する

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x(t), y(t), x^{\cdot}(t), y^{\cdot}(t))\,dt$$

のような任意の形のものではない。すなわち，v はそのような汎関数のむしろ特殊な場合にすぎないのである。なぜなら，被積分関数は t を陽には含まず，さらに $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$ に関して一次の同次関数だからである。

もし，ある他のパラメーター表示 $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ を導入すれば，汎関数 $v(x, y)$ は

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{y^{\cdot}_{\tau}}{x^{\cdot}_{\tau}}\right) x^{\cdot}_{\tau}\,d\tau$$

になるであろう。したがって，v の被積分関数のこの特別な形は，選ばれたパラメーター表示にはよらない。汎関数 v はその上で積分が行なわれる曲線だけに関係し，この曲線のパラメーター表示にはよらない。そのことを，つぎのようにして証明する。

汎関数

$$v(x(t), y(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x(t), y(t), x^{\cdot}(t), y^{\cdot}(t))\,dt$$

の被積分関数が t に陽には依存せず，また $x^{\cdot}, y^{\cdot}$ に関しての一次の同次関数であれば，汎関数 $v\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ は曲線 $x = x(t)$，$y = y(t)$ にのみ依存し，この曲線のパラメーター表示の選び方にはよらないということを示すのは困難ではない。

実際

$$v\bigl(x(t), y(t)\bigr) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi\bigl(x(t), y(t), x^{\cdot}(t), y^{\cdot}(t)\bigr)\,dt$$

とし，ここに

$$\Phi(x, y, kx^{\cdot}, ky^{\cdot}) = k\Phi(x, y, x^{\cdot}, y^{\cdot})$$

であると仮定しよう。われわれはここで

$$\tau = \varphi(t), \quad \text{ただし} \quad \varphi^{\cdot}(t) \neq 0,$$

とおいて，ある他のパラメーター表示

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau)$$

にうつろう。そうすると

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi\bigl(x(t), y(t), x^{\cdot}(t), y^{\cdot}(t)\bigr)\,dt$$
$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi\bigl(x(\tau), y(\tau), x^{\cdot}_{\tau}\varphi^{\cdot}(t), y^{\cdot}_{\tau}\varphi^{\cdot}(t)\bigr)\frac{d\tau}{\varphi^{\cdot}(t)}$$

となる。ところが Φ は $x^{\cdot}, y^{\cdot}$ について一次の同次関数であるから

$$\Phi(x, y, x^{\cdot}_{\tau}\varphi^{\cdot}, y^{\cdot}_{\tau}\varphi^{\cdot}) = \varphi^{\cdot}\Phi(x, y, x^{\cdot}_{\tau}, y^{\cdot}_{\tau})$$

であり，したがって

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, x^{\cdot}_{t}, y^{\cdot}_{t})\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, x^{\cdot}_{\tau}, y^{\cdot}_{\tau})\,d\tau$$

すなわち，被積分関数はパラメーターの変換によって不変のままである。

そのような汎関数の例は，曲線の長さ $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}}\,dt$ [1] および，曲線にかこまれた面積 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xy^{\cdot}-yx^{\cdot})\,dt$ である。

Φ を $x^{\cdot}, y^{\cdot}$ に関する一次の同次関数とするとき

$$v\bigl(x(t), y(t)\bigr) = \int_{t_0}^{t_1}\Phi(x, y, x^{\cdot}, y^{\cdot})\,dt$$

の形の汎関数の極値を見出すためには，任意の被積分関数 $\Phi(t, x, y, x^{\cdot}, y^{\cdot})$ をもつ汎関数に対してしなければならなかったように，つぎのオイラーの方程式系を解かなければならない：

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{x^{\cdot}} = 0, \qquad \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{y^{\cdot}} = 0$$

しかしながら，いま考えている特別な場合には，これらの方程式はもはや独立ではない。なぜなら，ある一つの解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ と並んで，この同じ曲線の異なるパラメーター表示を与える他の関数の対が存在し，これらすべての関数の対はまたオイラーの方程式を満足しなければならない。そしてもしこれらの方程式が独立であるとすると，微分方程式系の解の存在と一意性の一般定理に矛盾することになるからである。それゆえ，Φ が $x^{\cdot}, y^{\cdot}$ に関して一次の同次関数であるとき，

$$v\bigl(x(t), y(t)\bigr) = \int_{t_0}^{t_1}\Phi(x, y, x^{\cdot}, y^{\cdot})\,dt$$

の形の汎関数に対しては，オイラーの方程式の一つは他の一つから導かれる。それゆえ，極値曲線を求めるためには，それらのうちの一つを，パラメーターをきめる一つの方程式と共に解けば十分である。たとえば，方程式 $\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{x^{\cdot}} = 0$ を $x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2} = 1$ と共に解けばよい。この後の方の方程式は，選ばれたパラメーターが曲線の弧の長さであるという事実をあらわすものである。

---

(1) 関数 $\sqrt{x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}}$ は一次の正の同次関数（**positively homogeneous function**）である。すなわち，それは正の k' に対してのみ関係式 $F(k'x, k'y) = k'F(x, y)$ を満足する。しかしながら，この節で略述した理論に対しては，これで全く十分である。なぜなら，パラメーターを $\tau = \varphi(t)$ で変換するとき，一般性を失なうことなしに $\varphi^{\cdot}(t) > 0$ と仮定することができるからである。

7. 応 用 例

力学における基本的な変分原理は，オストログラツキー・ハミルトンの原理(*principle of Ostrogradski-Hamilton*)*である。これは，質点系のすべての可能な運動，すなわち拘束条件をやぶらないようないろいろな運動のうちで，実際に起る運動は，積分

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt$$

に極値を与えるような曲線に沿うものである，ということをのべるものである。ここに T, U はそれぞれ系の運動エネルギー，およびポテンシャル・エネルギーである。

この原理をいくつかの力学の問題に適用してみよう。

例題 1．質量が m_i，$i=1, 2, \ldots, n$，であって，座標 (x_i, y_i, z_i) の n 個の質点の系が与えられており，各質点にはそれぞれ，座標だけに関係する力の関数 U，すなわちポテンシャルによって決定される力 F_i が作用している。

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}$$

ここに，F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} は点 (x_i, y_i, z_i) に作用する力のベクトル F_i の成分である。系の運動に対する微分方程式を見出せ。

運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

であり，系のポテンシャル・エネルギーは U である。$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ に対するオイラーの方程式は

---

* 単にハミルトンの原理ともいう。

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}=0,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}=0,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z_i}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}=0$$

すなわち

$$m_i\ddot{x}_i-F_{ix}=0,$$
$$m_i\ddot{y}_i-F_{iy}=0,$$
$$m_i\ddot{z}_i-F_{iz}=0,\quad i=1,2,\ldots,n$$

である。もし系が，つぎのような形

$$\varphi_j(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n,z_1,z_2,\ldots,z_n)=0,$$
$$j=1,2,\ldots,m,\quad m<3n$$

の独立な拘束を受けているならば，そのときにはこれらの方程式から m 個の変数を，時間 t を除いた $3n-m$ 個の独立変数であらわすことができる。あるいは全部で $3n$ 個の変数は，$3n-m$ 個の新しい独立な変数でおきかえることができる。この新しい変数を

$$q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m}$$

とする。

さて T と U は $q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m}$ および t の関数と考えることができる。

$$T=T(q_1,q_2,\ldots,q_{3n-m},\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_{3n-m},t),$$
$$U=U(q_1,q_2,\ldots,q_{3n-m},t)$$

そしてオイラーの方程式は

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0,\quad i=1,2,\ldots,3n-m$$

となる。（これは**ラグランジュの運動方程式** (***Lagrange's equation of motion***) である。）

例題 2. 弦の自由振動を記述する微分方程式を導け。

座標系の原点を弦の端点の一つにとる。平衡状態において弦は直線に沿うて張られている。この直線を x-軸にとる(図 18)。点 x の，このつり合いの位置からのはずれ $u(x, t)$ は x と t の関数である。

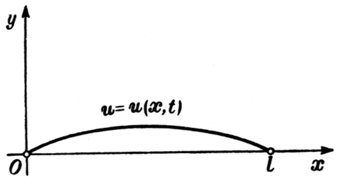


図 18.

完全に弾性的な弦の要素のポテンシャル・エネルギー U は縦方向ののびに比例する。さて弦の dx の部分は，変形した状態においては，その高次の無限小を除いて長さ $ds = \sqrt{1+u_x^2}\,dx$ をもち，したがって $(\sqrt{1+u_x^2}-1)\,dx$ だけ長くなっている。テーラーの公式から，$\sqrt{1+u_x^2} \approx 1+\frac{1}{2}u_x^2$ である。

u_x は小さいと考えて u_x の高次の項を省略すれば，弦の dx の部分のポテンシャル・エネルギーは $\frac{1}{2}ku_x^2\,dx$ である。ここに k はある係数であり，弦全体のポテンシャル・エネルギーは

$$\frac{1}{2}\int_0^l ku_x^2\,dx$$

である。

積分 $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ は，つぎの形をもつ：

$$v = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left(\tfrac{1}{2}\varrho u_t^2 - \tfrac{1}{2}ku_x^2\right)dx\,dt$$

弦の運動方程式は，汎関数 v に対するオストログラツキーの方程式である。したがって弦の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

である。もし弦が一様であれば，ϱ と k は定数であって，そのような弦の振動の運動方程式は

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

の形になる。

さて，弦に単位質量あたり外力 $f(t,x)$ が作用しているとしよう。この力は平衡の位置にある弦に垂直な方向であって弦の微小部分の質量に比例すると仮定する。弦の微小部分に作用するそのような外力は，単位時間に $\varrho f(t,x)u\,dx$ の形であらわされる仕事をすることができることは容易にわかる。したがって，オストログラツキー・ハミルトンの積分 $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ はつぎのような形をもつ：

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left(\tfrac{1}{2}\varrho u_t^2-\tfrac{1}{2}k\,u_x^2+\varrho f(t,x)u\right)dx\,dt$$

それゆえ弦の強制振動の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u_t)-\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)-\varrho f(t,x)=0$$

となる。あるいは一様な弦の場合には

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{k}{\varrho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$$

である。振動する膜の方程式も同じような方法で導くことができる。

例題 3. 振動する細長い棒の運動方程式を導け。

平衡の位置にあるときの縦方向の軸を x-軸として選ぶ。静止の位置からのふれ $u(x,t)$ は，x と t の関数であって，棒の運動エネルギーは

$$T=\tfrac{1}{2}\int_0^l\varrho u_t^2\,dx$$

である。ここに l は棒の長さである。棒はのびないものと仮定する。そうすると弾性棒のポテンシャル・エネルギーは，その曲率の二乗に比例する。したがって

$$U=\tfrac{1}{2}\int_0^l k\left\{\frac{\partial^2 u/\partial x^2}{[1+(\partial u/\partial x)^2]^{3/2}}\right\}^2 dx$$

である。静止の位置からのふれは小さく，分母の $(\partial u/\partial x)^2$ の項は省略することができると仮定しよう。そうすると

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

となる。オストログラツキー・ハミルトンの積分は

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\frac{1}{2}\varrho u_t^2 - \frac{1}{2}k u_{xx}^2\right] dx dt$$

の形をもつ。それゆえ，弾性棒の自由振動の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u_t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k u_{xx}) = 0$$

である。もし棒が一様であれば，ϱ, k は定数であって，一様な振動する棒の方程式は

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

となる。もし外力 $f(x, t)$ が棒に作用しているならば，この力のポテンシャルを考えに入れなければならない（前の例題を参照されたい）。

問　　題

つぎの汎関数の極値曲線を見出せ。

1. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$

2. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy')dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$

3. $v(y(x)) = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')dx, \quad y(0) = 1 \quad y(1) = 2$

4. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y(1+y'^2)}dx$

5. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y'(1+x^2y')\,dx$

6. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2+2yy'-16y^2)\,dx$

7. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (xy'+y'^2)\,dx$

8. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx$

9. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2+y'^2-2y\sin x)\,dx$

10. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2-y''^2+x^2)\,dx$

11. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (2xy+y'''^2)\,dx$

12. $v(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (2yz-2y^2+y'^2-z'^2)\,dx$

13. $v(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2+z'^2+y'z')\,dx$

14. 汎関数

$$v(z(x, y)) = \iint_D \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) dxdy$$

に対するオストログラツキーの方程式を書け。

15. つぎの汎関数に対するオストログラツキーの方程式を書け。

$$v(u(x, y, z)) = \iiint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2uf(x, y, z)\right) dxdydz$$

つぎの汎関数の極値曲線を求めよ。

16. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3}\,dx$

17. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2y'^2 + y''^2)\,dx$

18. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y\cosh x)\,dx$

19. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x)\,dx$

20. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y\sin x)\,dx$

II　章

動きうる境界をもつ変分の問題とその他の問題

1.　動きうる境界をもつ最も簡単な問題

I 章では，汎関数

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

の端点 (x_0, y_0), (x_1, y_1) はあらかじめ固定されていると仮定した。つぎにわれわれは端点の一つまたは両方が変化しうる場合を考えよう。それゆえ，許される曲線族の範囲は広がって，調べている曲線と同じ端点をもつような比較曲線とともに，任意の端点をもつ曲線族をも考えることになる。

それゆえ，一つの曲線 $y = y(x)$ が，変化する境界点をもつ問題に対して極値を与えるならば，その同じ曲線はもちろん曲線 $y = y(x)$ と同じ境界点をもつ，より制限された曲線族に関しても極値を与え，それゆえ固定された境界点をもつ問題に対する極値の基本的な必要条件が成り立たなければならない。すなわち関数 $y(x)$ はオイラーの方程式

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

の解でなければならない。したがって，動き得る境界をもつ問題に対して極値を与える曲線 $y = y(x)$ は極値曲線でなければならない。

オイラーの方程式の一般解は，二つの任意定数を含んでいる。それらを決定するためには二つの付加的な関係が必要である。固定境界の問題の場合には，これらの関係式は

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{および} \qquad y(x_1) = y_1$$

であった。動きうる境界の場合には，これらの関係式のうちの一つあるいは両方が成り立たない。それゆえ，オイラーの方程式の一般解の中の任意定数を決定するためには，何か他の条件が，極値に対する必要条件（δv が 0 になるという条件）から得られなければならない。

動きうる境界をもつ問題に対しては，極値は，曲線がオイラーの方程式の積分曲線 $y=y(x, C_1, C_2)$ の一つであるときにのみ起りうるから，われわれはこれらの積分曲線において汎関数がとる値だけに注意をむけることにしよう。それゆえ汎関数 v は，二つのパラメーター C_1, C_2 をもち，積分限界が x_0, x_1 であるような関数 $v\big(y(x, C_1, C_2)\big)$ と考えることができ，したがって，汎関数の変分はこの関数の微分と一致する。簡単のために，端点の一つ，たとえば (x_0, y_0) は固定されているが，もう一つの端点 (x_1, y_1) は $(x_1+\Delta x_1, y_1+\Delta y_1)$ に動くことができると仮定しよう。$(x_1+\Delta x_1, y_1+\Delta y_1)$ は変分法では通常 $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ と書かれる。

二つの許された曲線 $y=y(x)$ と $y=y(x)+\delta y$ とは，変分 δy と $\delta y'$ の絶対値が小さく，そしてまた増分 δx_1 と δy_1 の絶対値が小さいならば，お互いに近いと考えられるであろう。（増分 δx_1 と δy_1 は通常それぞれ**境界値** x_1, y_1 **の変分**とよばれる。）

点 (x_0, y_0) を通る極値曲線は，極値曲線の曲線束（pencil）$y=y(x, C_1)$ をつくる。この曲線束に属する曲線に限れば，汎関数 $v\big(y(x, C_1)\big)$ は C_1 と x_1 の関数になる。もしこの曲線束に属する曲線が，考えている一つの極値曲線の近傍で交わらないならば，$v\big(y(x, C_1)\big)$ は x_1 と y_1 に関して一価関数と考えることができる。なぜなら，x_1 と y_1 を任意に選ぶと，曲線束の中の一つの極値曲線が一意的に決定され（図19），そして汎関数の一つの値がきまるからである。

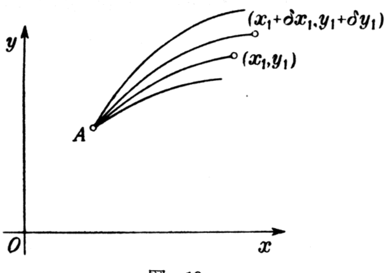


図　19.

端点(x_1, y_1)が図のように$(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$へ動くと仮定して，曲線束$y=y(x, C_1)$の極値曲線においてとられた汎関数$v\big(y(x, C_1)\big)$の変分を計算しよう。この曲線束に属する曲線においてとられた汎関数はx_1とy_1の関数になるから，汎関数の変分はこの関数の微分になる。われわれは，増分Δvの線形主要部，すなわちδx_1とδy_1について一次の部分を分離しよう。

$$\text{(I)}\qquad \Delta v=\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx-\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$
$$=\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\big(F(x, y+\delta y, y'+\delta y')-F(x, y, y')\big)dx$$

右辺の第一項を平均値の定理を用いて変形すると

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx=F\big|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1$$

となる。ここに$0<\theta<1$である。さらに関数Fの連続性によって

$$F\big|_{x=x_1+\theta\delta x_1}=F(x, y, y')\big|_{x=x_1}+\varepsilon_1$$

であって，$\delta x_1\to 0$, $\delta y_1\to 0$のとき$\varepsilon_1\to 0$である。

したがって，

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx=F(x, y, y')\big|_{x=x_1}\delta x_1+\varepsilon_1 dx_1$$

が得られる。(I)の右辺の第二項を変形するために，テーラーの公式を利用しよう。

$$\int_{x_0}^{x_1}\big(F(x, y+\delta y, y'+\delta y')-F(x, y, y')\big)dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}\big(F_y(x, y, y')\delta y+F_{y'}(x, y, y')\delta y'\big)dx+R_1$$

ここに R_1 は δy あるいは $\delta y'$ より高次の無限小である。さらにその被積分関数の第二項を部分積分すれば，増分 Δv の一次の部分

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,dx$$

はつぎの形に変形できる：

$$[F_{y'}\,\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}\,F_{y'}\right)\,\delta y\,dx$$

汎関数の値は極値曲線においてだけとられるから

$$F_y - \frac{d}{dx}\,F_{y'} \equiv 0$$

である。また端点 $(x_0,\ y_0)$ は固定されているから，$\delta y|_{x=x_0} = 0$ であって，それゆえ

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,dx = [F_{y'}\,\delta y]_{x=x_1}$$

である。$\delta y\big|_{x=x_1}$ は y_1 の増分 δy_1 と同じ意味ではないことに注意されたい。なぜなら，δy_1 は自由な端点が $(x_1,\ y_1)$ から $(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1)$ に動かされたときの y-座標の変化であるが，一方 $\delta y\big|_{x=x_1}$ は一つの極値曲線が (x_0, y_0), (x_1, y_1)を通るものから，$(x_0,\ y_0)$, $(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1)$ を通る他のものに変えられるとき，点 $x = x_1$ において生ずるこの極値曲線の y-座標の変化であるからである（図 20）。

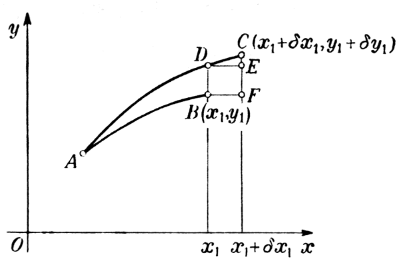


図　20.

図 20 に示されているように

$$BD = \delta y\big|_{x=x_1}, \quad FC = \delta y_1, \quad EC \approx y'(x_1)\,\delta x_1,$$
$$BD = FC - EC$$

である。すなわち高次の無限小を別にすれば

$$\delta y\big|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1$$

である。したがって

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\,dx \approx F\big|_{x=x_1}\delta x_1,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \big(F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')\big)\,dx \approx F_{y'}\big|_{x=x_1}\big(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1\big)$$

が得られる。ここに，すべての近似式は，δx_1 あるいは δy_1 に関して二次あるいはそれより高次の無限小を除いて成立する。したがって **(I)** から

$$\delta v = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\big(\delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1\big)$$
$$= (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1$$

あるいは

$$dv^*(x_1, y_1) = (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}dx_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}dy_1$$

が導かれる。ここに $v^*(x, y)$ は汎関数 v を，曲線束 $y = y(x, C_1)$ の極値曲線においてだけ，考えたときに得られる関数であり，また $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$, $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$ は変化する端点の座標の変化である。極値に対する基本的な必要条件 $\delta v = 0$ はつぎの形をとる：

(II)
$$(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1 = 0$$

変分 $\delta x_1, \delta y_1$ が独立であれば，これから

$$(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1}=0 \quad \text{および} \quad F_{y'}\big|_{x=x_1}=0$$

が導かれる。しかしながら，しばしば変分 δx_1 と δy_1 が独立でないことが要求される。

たとえば，右端の点 (x_1, y_1) が，ある曲線

$$y_1=\varphi(x_1)$$

に沿うて動くことができると仮定しよう。そのときには $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1)\delta x_1$ であり，したがって条件 (II) は $\big(F+(\varphi'-y')F_{y'}\big)\delta x_1=0$ となる。あるいは δx_1 は任意に変化しうるから，$\big(F+(\varphi'-y')F_{y'}\big)\big|_{x=x_1}=0$ となる。この条件は端点における方向係数 φ' と y' の間に，ある関係をつけることになる。この関係は**横断性の条件**（***transversality condition***）とよばれる。

横断性の条件と $y_1=\varphi(x_1)$ の条件をともに用いれば，一般にわれわれは汎関数に極値を与えることのできる一つの，あるいはそれ以上の極値曲線を，曲線束 $y=y(x, C)$ から区別してとりだすことができる。もし端点 (x_0, y_0) が曲線 $y=\psi(x)$ に沿うて動きうるならば，同じ議論によって

$$[F+(\psi'-y')F_{y'}]_{x=x_0}=0$$

が得られる。これは端点 (x_0, y_0) における横断性の条件である。

例題　1.　つぎの形の汎関数に対して，横断性の条件を見出せ。

$$v=\int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

横断性の条件 $F+F_{y'}(\varphi'-y')=0$ は

$$A(x, y)\sqrt{1+y'^2}+\frac{A(x, y)y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\varphi'-y')=0$$

すなわち

$$\frac{A(x, y)(1+\varphi'y')}{\sqrt{1+y'^2}}=0$$

の形をとる。端点において $A(x, y) \neq 0$ と仮定しておけば，$1+y'\varphi' = 0$ すなわち $y' = -1/\varphi'$ である。これは，この特殊な場合には横断性の条件は直交条件になることを意味する。

例題 2. つぎの汎関数の極値を調べよ（図21）。

$$\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx, \quad ここに \quad y(0)=0, \quad および \quad y_1 = x_1 - 5 \quad とする。$$

オイラーの方程式の積分曲線は円 $(x-C_1)^2+y^2 = C_2^2$ である。（55 頁の問題 1）第一の境界条件は $C_1 = C_2$ を与える。与えられた汎関数に対しては，横断性の条件は直交条件になるから（前の例題参照），直線 $y_1 = x_1 - 5$ は直径の一つでなければならない。したがって求める円の中心は $(5, 0)$ であって，これは直線 $y = x-5$ と x-軸の交点である。それゆえ $(x-5)^2+y^2 = 25$ あるいは $y = \pm\sqrt{10x-x^2}$ である。それゆえ極値は径路 $y = \sqrt{10x-x^2}$ あるいは $y = -\sqrt{10x-x^2}$ においてのみ生じることができる。

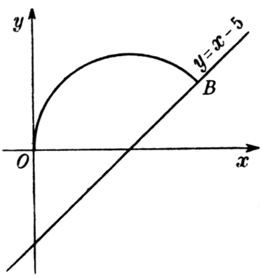


図 21.

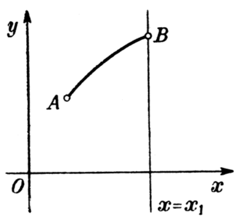


図 22.

もし端点 (x_1, y_1) が鉛直線に沿うてのみ動くことができ（図 22），したがって $\delta x_1 = 0$ であれば，関係式(II)は $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$ になる。たとえば，最速降下線の問題（30 頁）において，左端の点は固定されているが，右端の点は鉛直線に沿うて動くことができると仮定しよう。

汎関数

$$v = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

の極値曲線はサイクロイドである。条件 $y(0)=0$ に注意すれば，これらのサイクロイドのパラメーター表示での方程式は

$$x=C_1(t-\sin t),\qquad y=C_1(1-\cos t)$$

である。C_1 を決定するために，われわれは条件 $F_{y'}|_{x=x_1}=0$ を用いる。これはこの場合には

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1}=0$$

の形をとる。それゆえ $y'(x_1)=0$ である。したがって求めるサイクロイドは鉛直線 $x=x_1$ と直角に交わらなければならない。そしてその結果，点 $x=x_1$, $y=y_1$ はサイクロイドの最低点でなければならない（図23）。パラメーターの $t=\pi$ という値が，この点に対応するから，$x_1=C_1\pi$, $C_1=x_1/\pi$ であることがわかる。それゆえ極値はサイクロイド

$$x=\frac{x_1}{\pi}(t-\sin t),\ y=\frac{x_1}{\pi}(1-\cos t)$$

においてのみ生じることができる。

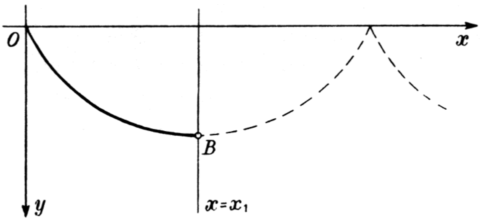


図　23.

もし汎関数 $v=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ の極値問題に現われる端点 (x_1,y_1) が，水平線 $y=y_1$ に沿って動くことができるならば，$\delta y_1=0$ であって，条件 (II) すなわち横断性の条件は

$$[F-y'F_{y'}]_{x=x_1}=0$$

の形をとる。

2. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$ の形の汎関数に対する動きうる境界をもつ問題

汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$$

の極値を調べる場合に，境界の一つ，たとえば $B(x_1, y_1, z_1)$ は動きうるが，他の境界点 $A(x_0, y_0, z_0)$ は固定されているか，あるいは両方の境界点が動きうる場合には，極値はオイラーの方程式

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \quad F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$

の積分曲線においてのみ，達せられうるということは明らかである。事実，ある曲線 C が動きうる境界をもつ問題の極値を与えるものと仮定しよう。いいかえれば，汎関数 v は曲線 C において，それに隣接するすべての許された曲線に関して極大値あるいは極小値をとる。これら隣接する曲線の中には，極値を与える曲線 C と同じ端点をもつようなものがある。したがって，ふたたび，もっと制限された隣接曲線族，すなわち曲線 C と同じ端点をもつ隣接曲線族に関して，v は C において極値をもつということが導かれる。

それゆえ，曲線 C は固定境界点をもつ問題に対する極値の必要条件を満足していなければならない。とくに，それはオイラーの方程式系の積分曲線の一つでなければならない。

オイラーの方程式系の一般解は 4 個の任意定数を含んでいる。もし，固定されていると考えている一つの境界点 $A(x_0, y_0, z_0)$ の座標が，あらかじめ与えられているならば，一般にこれら任意定数のうち 2 個は消去することができる。

残りの2個の任意定数を求めるためには，あと二つの関係式が必要であ。これらの関係式は条件 $\delta v = 0$ から得られるであろう。この変分を計算するために，われわれは汎関数をオイラーの方程式系の積分曲線だけに限って考えることにしよう。そうしてもよいのは，極値はこれらの曲線においてのみ達せられ得るからである。このようにして，汎関数 v は点 $B(x_1, y_1, z_1)$ の座標 x_1, y_1, z_1 のある関数 $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ になり，この汎関数の変分は，関数 Φ の微分になる。(1)

さきに（60-62 頁）行なったのと同じような計算によって

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \big(F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z') - F(x, y, z, y', z')\big)\,dx$$

が得られる。これらのうち第一の積分については，平均値の定理を適用し，つぎに連続性を用い，第二の積分からは，テーラーの公式を用いて線形主要部を分離する。そうすると

$$\delta v = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_z\,\delta z + F_{y'}\,\delta y' + F_{z'}\,\delta z')\,dx$$

が得られる。被積分関数の後の二項に，部分積分を行なうとつぎのようになる：

---

(1) 点 A を通る曲線束のなかの極値曲線が，任意の近傍の点で交わらないと仮定すれば，この関数 Φ は一価である。なぜなら，そのような場合には点 $B(x_1, y_1, z_1)$ は常に B を通る極値曲線を一意に決定するからである。

$$\delta v = F\Big|_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'}\delta y]_{x=x_1} + [F_{z'}\delta z]_{x=x_1} +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y + \left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right)\delta z\right)dx$$

さて v は極値曲線

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0, \qquad F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} \equiv 0$$

においてだけ考えるのであるから，結局

$$\delta v = F_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'}\delta y]_{x=x_1} + [F_{z'}\delta z]_{x=x_1}$$

が得られる。62 頁で行なったのと同じ議論によって

$$\delta y\Big|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1 \quad \text{および} \quad \delta z\Big|_{x=x_1} = \delta z_1 - z'(x_1)\delta x_1$$

であるから，最後に

$$\delta v = [F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{z'}\Big|_{x=x_1}\delta z_1 = 0$$

が得られる。もし変分 δx_1, δy_1, δz_1 が独立であれば，$\delta v = 0$ の条件から

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} = 0, \quad F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0, \quad F_{z'}\Big|_{x=x_1} = 0$$

が導かれる。もし境界点 $B(x_1, y_1, z_1)$ がある曲線 $y_1 = \varphi(x_1)$, $z_1 = \psi(x_1)$ に沿うて動きうるならば，$\delta y_1 = \varphi'(x_1)\delta x_1$, $\delta z_1 = \psi'(x_1)$ であって，条件 $\delta v = 0$ すなわち

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{z'}\Big|_{x=x_1}\delta z_1 = 0$$

は

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 = 0$$

になり，δx_1 は任意であるから

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0$$

が得られる。この条件は，汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$$

の極値を決定する問題に対する **横断性の条件** とよばれる。この横断性の条件は，方程式 $y_1=\varphi(x_1)$，$z_1=\psi(x_1)$ とともに用いれば，オイラーの方程式系の一般解に含まれるすべての任意定数を計算するのに十分である。

もし境界点 $B(x_1, y_1, z_1)$ がある曲面 $z_1=\varphi(x_1, y_1)$ の上を動くことができるならば

$$\delta z_1=\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta y_1$$

である。ここに，変分 δx_1 および δy_1 は任意であり，また独立である。したがって，条件 $\delta v=0$ を完全に書いた式

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}\big|_{x=x_1}\delta z_1=0$$

は，つぎの形をとる：

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}+\varphi'_x F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+$$
$$+[F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}\delta y_1=0$$

δx_1 と δy_1 は独立であるから，これから

$$[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0, \quad [F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}=0$$

が得られる。これら二つの条件と $z_1=\varphi(x_1, y_1)$ をともに用いれば，一般に，オイラーの方程式系の一般解に含まれる二つの任意定数を決定するのに十分である。

もし境界点 $A(x_0, y_0, z_0)$ も動きうるならば，同じ議論によって，この点に対しても上と同じような条件を得ることができる。

汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')\,dx$$

を考え，境界点の一つ $B(x_1,y_{11},y_{21},\ldots,y_{n1})$ が変化しうるものとする，同じような議論によって，この点において成り立つつぎの関係式が見出される：

$$\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=x_1}\delta x_1+\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\Bigg|_{x=x_1}\delta y_{i1}=0$$

例題 1．つぎの汎関数に対して，横断性の条件を見出せ。

$$v=\int_{x_0}^{x_1}A(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,\qquad ここに\quad z_1=\varphi(x_1,y_1)$$

この場合，横断性の条件

$$[F-y'F_{y'}+(\varphi_x'-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0\quad および\quad [F_{y'}+F_{z'}\varphi_y']_{x=x_1}=0$$

は $x=x_1$ において $1+\varphi_x'z'=0$ および $y'+\varphi_y'z'=0$ となる。あるいは $x=x_1$ において

$$\frac{1}{\varphi_x'}=\frac{y'}{\varphi_y'}=\frac{z'}{-1}$$

である。この関係式は，点 (x_1,y_1,z_1) における極値曲線の接線ベクトル $\bar{t}(1,y',z')$ と，同じ点における曲面 $z=\varphi(x,y)$ の法線ベクトル $\overline{N}(\varphi_x',\varphi_y',-1)$ が平行であることを意味する。したがってこの場合には横断性の条件は，極値曲線が曲面 $z=\varphi(x,y)$ に直交しなければならないことを意味する。

例題 2．二つの曲面

$$z=\varphi(x,y)\quad および\quad z=\psi(x,y)$$

の間の距離の極値を求めよ。

いいかえれば，積分

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

の極値を，一つの境界点の座標が方程式 $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ を満足し，もう一つの境界点の座標が，方程式 $z_1 = \psi(x_1, y_1)$ を満足するという付加条件の下で求めよ。

被積分関数は y' と z' のみを含んでいるから，極値曲線は **直線** である（34 頁例題 2 を見よ）。そして汎関数

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

は，前の例題で考えた汎関数

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

の特別な場合であるから，点 (x_0, y_0, z_0) と点 (x_1, y_1, z_1) の両方において **横断性** の条件は直交条件になる。したがって，極値が生じることができるのは，点 (x_0, y_0, z_0) においては，$z = \varphi(x, y)$ に垂直で，(x_1, y_1, z_1) においては $z = \psi(x, y)$ に垂直であるような直線に沿うてだけである（図 **24**)。

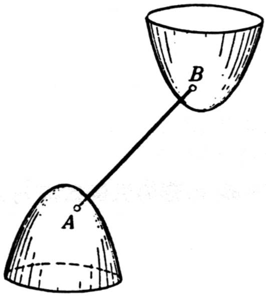


図 24.

例題 3. 汎関数

$$v = \int_0^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\,dx$$

の極値を吟味せよ。ここに $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ であって，点 (x_1, y_1, z_1) は平面 $x = x_1$ の上を動きうるものとする。

オイラーの方程式系は $z''-y=0$, $y''-z=0$ であり，したがって $y^{\mathrm{iv}}-y=0$ だから，$y=C_1\cosh x+C_2\sinh x+C_3\cos x+C_4\sin x$ また $z=y''$ であるから，$z=C_1\cosh x+C_2\sinh x-C_3\cos x-C_4\sin x$ である。$y(0)=0$, $z(0)=0$ の条件から，$C_1+C_3=0$ および $C_1-C_3=0$ が得られるから，$C_1=C_3=0$ である。変化する点における条件

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}\big|_{x=x_1}\delta z_1=0$$

は，$\delta x_1=0$ であって δy_1, δz_1 は独立であるから

$$F_{y'}\big|_{x=x_1}=0 \quad \text{および} \quad F_{z'}\big|_{x=x_1}=0$$

になる。いまの場合には，$F_{y'}=2y'$, $F_{z'}=2z'$ であるから

$$y'(x_1)=0 \quad \text{および} \quad z'(x_1)=0$$

となって

$$C_2\cosh x_1+C_4\cos x_1=0 \quad \text{および} \quad C_2\cosh x_1-C_4\cos x_1=0$$

が得られる。もし $\cos x_1\neq 0$ のときには $C_2=C_4=0$ となるから，その汎関数の極値は直線 $y=0$, $z=0$ においてのみ起りうる。$\cos x_1=0$ したがって，n を整数として $x_1=\frac{1}{2}\pi+n\pi$ ならば $C_2=0$ であって，C_4 は任意定数である。それゆえ

$$y=C_4\sin x, \qquad z=-C_4\sin x$$

となる。この後の場合には任意の C_4 に対して，$v=0$ であることは直ちに証明される。

3. $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')dx$ の形の汎関数に対する動きうる境界をもつ問題

I 章 4 節で，汎関数

$$v\big(y(x)\big)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')\,dx$$

の極値を調べるときに，われわれは境界点における関数の値および，その一階導関数の値はつぎのように，与えられているものと仮定した。すなわち

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad y(x_1)=y_1, \quad y'(x_1)=y_1'$$

もしこれらの中のいくつかが変化しうるならば，そのような変分の問題は**変化しうる，あるいは動きうる境界をもつ問題**（***problem with variable or movable boundaries***）とよばれる。

動きうる境界をもつ問題に対しても，もしある一つの曲線において極値が存在するならば，それはまたより制限された隣接曲線族，すなわち曲線 C と共通の端点をもち，これらの点で接線が同じ方向を向いているような，曲線族の間でも極値をとる。したがって曲線 C はオイラー・ポアソンの方程式

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

を満足しなければならない（36 頁を参照せられたい。）

この四階の微分方程式の一般解 $y = y(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$ は 4 個の任意定数を含んでいる。これらの定数を決定するためには，4 個の付加的な関係式が必要である。これらの関係式は，極値に対する基本的な必要条件 $\delta v = 0$ から得ることができる。

計算をあまり複雑にしないために，点 x_0 における y, y' の値はあらかじめ固定され，$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ であるとし，もう一つの端点は変化しうるものと仮定しよう。一般に，境界条件 $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ を利用して，任意定数のうち 2 個を計算することができる。残りの二つは条件 $\delta v = 0$ から決定することができる。このとき汎関数はオイラー・ポアソン方程式の解の範囲内で考察される。それは，極値はこれらの曲線においてのみ生じうるからである。汎関数の増分 Δv の線形主要部は，II 章 1 節のようにして計算することができる。すなわち

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'')\,dx - \\ - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'')\,dx + \\ + \int_{x_0}^{x_1} \bigl(F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'') - F(x, y, y', y'')\bigr)\,dx$$

平均値の定理を適用し，関数 F および $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ の連続性を用いれば

$$\Delta v = F(x, y, y', y'')\big|_{x=x_1}\delta x_1 + \\ + \int_{x_0}^{x_1}(F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y' + F_{y''}\,\delta y'')\,dx + R$$

が得られる。ここに R は絶対値 $|\delta x_1|$, $|\delta y_1|$, $|\delta y|$, $|\delta y'|$ および $|\delta y''|$ の最大値よりも高次の無限小である。したがって

$$\delta v = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1}(F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y' + F_{y''}\,\delta y'')\,dx$$

となる。被積分関数の第二項を部分積分し，第三項については部分積分を二回くりかえし，その場合

$$\delta y|_{x=x_0} = 0, \quad \delta y'\big|_{x=x_0} = 0, \quad \text{および} \quad F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} \equiv 0$$

であることに注意すれば

$$\delta v = \left[F\,\delta x_1 + F_{y'}\,\delta y + F_{y''}\,\delta y' - \frac{d}{dx}(F_{y''})\,\delta y\right]_{x=x_1}$$

が得られる。関係式 $\delta y_1 = y'(x_1)\,\delta x_1 + [\delta y]_{x=x_1}$ (62 頁) を用い，またこの結果を $\delta y_1'$ にも適用して

$$\delta y_1' = y''(x_1)\,\delta x_1 + [\delta y']_{x=x_1}$$

を用いればつぎの式が得られる：

$$\delta v = \left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{d}{dx}(F_{y''})\right]_{x=x_1}\delta x_1 + \\ + \left[F_{y'} - \frac{d}{dx}(F_{y''})\right]_{x=x_1}\delta y_1 + F_{y''}\big|_{x=x_1}\delta y_1'$$

その結果，極値の基本的な条件 $\delta v = 0$ はつぎの形をとる：

$$\text{(I)} \qquad \left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{d}{dx}(F_{y''})\right]_{x=x_1}\delta x_1 + \\ + \left[F_{y'} - \frac{d}{dx}(F_{y''})\right]_{x=x_1}\delta y_1 + F_{y''}\Big|_{x=x_1}\delta y_1' = 0$$

もし，δx_1, δy_1 および $\delta y_1'$ が独立であれば，それらの係数は $x = x_1$ において 0 にならねばならない。そしてそれらの間のある関係，たとえば $y_1 = \varphi(x_1)$ および $y_1' = \psi(x_1)$ があれば，そのとき $\delta y_1 = \varphi'(x_1)\,\delta x_1$, $\delta y_1' = \psi'(x_1)\,\delta x_1$ であって，これらの値を(I)に代入すれば

$$\left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{d}{dx}(F_{y''}) + \left(F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''}\right)\varphi' + \right. \\ \left. + F_{y''}\psi'\right]_{x=x_1}\delta x_1 = 0$$

となる。それゆえ

$$\left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{d}{dx}(F_{y''}) + \left(F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''}\right)\varphi' + \right. \\ \left. + F_{y''}\psi'\right]_{x=x_1} = 0$$

でなければならない。この条件は一般に $y_1 = \varphi(x_1)$ および $y_1' = \psi(x_1)$ と合わせて x_1, y_1, y_1' の値を決定するのに十分である。

もし，x_1, y_1, y_1' が一つの方程式 $\varphi(x_1, y_1, y_1') = 0$ で結びつけられていれば，そのときには変分 δx_1, δy_1, $\delta y_1'$ のうちの二つが独立であって，残りの一つが方程式

$$\varphi'_{x_1}\delta x_1 + \varphi'_{y_1}\delta y_1 + \varphi'_{y_1'}\delta y_1' = 0$$

で与えられる。たとえば，$\varphi'_{y_1'} \neq 0$ とすれば

$$\delta y_1' = -\frac{\varphi_{x_1}'\delta x_1 + \varphi_{y_1}'\delta y_1}{\varphi_{y_1'}'}$$

である。

$\delta y_1'$を (I) に代入し，独立な変分 δx_1 と δy_1 の係数が 0 にならなければならないことを思い出せば，点 $x = x_1$ において二つの方程式が得られ，これらと $\varphi(x_1, y_1, y_1') = 0$ をともに用いれば一般に x_1, y_1, y_1' を計算することができる。もし点 $A(x_0, y_0)$ も変り得るならば，この点に対しても同じような条件が得られる。

例題　汎関数

$$v = \int_0^1 (1+y''^2)\,dx$$

の極値を調べよ。ただし $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$，$y(1) = 1$ とし，$y'(1)$ は変化しうるものとする。

オイラー・ポアソンの方程式

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$$

は，この場合には $y^{\mathrm{iv}} = 0$ となる。それゆえ，$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$ である。$y(0) = 0$ の条件から $C_1 = 0$ さらに $y'(0) = 1$ から $C_2 = 1$ がもとめられる。$y(1) = 1$ から，$C_3 + C_4 = 0$ が導かれる。$\delta x_1 = 0$ および $\delta y_1 = 0$ であるが $\delta y_1'$ は任意であるから，条件 (I) は

$$F_{y''}\big|_{x=x_1} = 0, \quad \text{すなわち} \quad y''(1) = 0$$

になる。$y''(x) = 2C_3 + 6C_4x$ であるから，$x = 1$ に対して $2C_3 + 6C_4 = 0$ が得られる。$C_3 + C_4 = 0$ であったから，これから $C_3 = C_4 = 0$ を得る。したがって，極値は直線 $y = x$ においてのみ生ずることができる。

4．尖点をもつ極値曲線

いままでは，未知関数 $y = y(x)$ が連続であり，かつ連続な一階導関数をもつと仮定される変分の問題を考えてきた。しかしながら，この第二の条件が本

質的なものでないような多くの問題がある。すなわち**尖点** (cusp) をもった極値曲線においてのみ極値をとるような変分の問題がある。たとえば，極値曲線の反射とか屈折の問題がそれであって，これらは光の反射や屈折の問題の一般化である。

反射された極値曲線の問題　汎関数，$v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx$ を極値にするような曲線で，与えられた二点 $A(x_0, y_0)$, $B(x_2, y_2)$ を通るものを求める問題である。ただしその曲線は，与えられた弧 $y = \varphi(x)$ によって反射された後，点 B に到達するものとする（図25)。

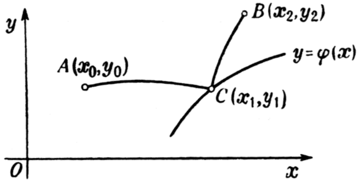


図　25.

反射点 $C(x_1, y_1)$ が極値曲線の尖点であってもよく，したがって，左からの導関数 $y'(x_1-0)$ と，右からの導関数 $y'(x_1+0)$ とが一般には等しくなくてもよいことは明らかである。それゆえ汎関数 $v\big(y(x)\big)$ をつぎの形に表わすのがもっとも便利である：

$$v\big(y(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

ここで導関数 $y'(x)$ は区間 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ および $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ のおのおの の上で，連続であると仮定する。それゆえ，そのおのおのについては，前に得た結果を用いることができる。

極値に対する基本的な条件 $\delta v = 0$ は

$$\delta v = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx = 0$$

の形になる。

点(x_1, y_1)は曲線 $y = \varphi(x)$ に沿うて動き得るから，変分

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \quad \text{および} \quad \delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

の計算は一つの境界点が動きうる問題と同じように行なうことができ，II 章 1 節（63 頁）の結果を用いることができる。そのとき曲線 AC, CB が極値曲線であり，それゆえこれらの弧のおのおのにおいて，$y = y(x)$ がオイラーの方程式の解であることは明らかである。なぜなら，これらの曲線のうちの一つがすでに見出されたと考えるならば，第二の曲線を見出すためには，端点がすでに固定されたものとして，汎関数 $\int_{x_0}^{x_1} F dx$（あるいは $\int_{x_1}^{x_2} F dx$）の極値を見出せば十分だからである。その結果，変分を計算する場合に，汎関数は折れ曲る点 C をもつ極値曲線においてだけ変化するものと仮定することができる。

このようにして，

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx = [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1-0}\delta x_1$$

および

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx = -[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1+0}\delta x_1$$

となる（63 頁）。ここで添え字 $x = x_1 - 0$, $x = x_1 + 0$ は，括弧の中の表式において，それぞれ x が左から，すなわち x_1 より小さい側から，x_1 に近づく場合，および x が右から，すなわち x_1 より大きい値から，x_1 に近づく場合の極限値をとることを意味する。反射点においては導関数だけが不連続であるから，第一の場合にはこの尖点において左からの導関数を，また第二の場合には右からの導関数をとらなければならないことになる。

そのとき条件 $\delta v = 0$ はつぎの形をとる：

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1-0}\delta x_1 - [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1+0}\delta x_1 = 0$$

あるいは，δx_1 は任意に変わりうるから

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1-0}=[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1+0}$$

あるいは

$$F\big(x_1,\,y_1,\,y'(x_1-0)\big)+\big(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0)\big)\times$$
$$\times F_{y'}\big(x_1,\,y_1,\,y'(x_1-0)\big)=F\big(x_1,\,y_1,\,y'(x_1+0)\big)+$$
$$+\big(\varphi'(x_1)-y'(x_1+0)\big)F_{y'}\big(x_1,\,y_1,\,y'(x_1+0)\big)$$

この**反射の条件**は

$$v=\int_{x_0}^{x_2}A(x,\,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

の形の汎関数に対してはとくに簡単な形をとる。すなわち

$$A(x_1,\,y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1-0}$$
$$=A(x_1,\,y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1+0}$$

あるいは $A(x_1,\,y_1)\neq 0$ と仮定して $A(x_1,\,y_1)$ で割って簡単にすれば

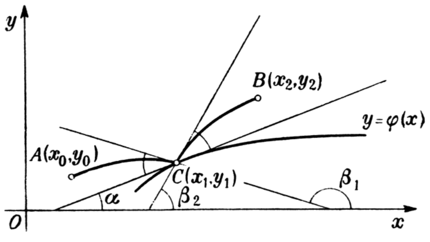


図　26.

$$\left.\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1-0} = \left.\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1+0}$$

が得られる。曲線 $y = \varphi(x)$ の接線と x-軸の間の角を α とし，また反射点における 左側曲線の接線， 右側曲線の接線の 傾斜角 をそれぞれ β_1, β_2 とすれば（図26）

$$y'(x_1-0) = \tan\beta_1, \quad y'(x_1+0) = \tan\beta_2, \quad \varphi'(x_1) = \tan\alpha$$

である。そうすると，反射点における条件は

$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta_1}{-\sec\beta_1} = \frac{1+\tan\alpha\tan\beta_2}{\sec\beta_2}$$

の形になる。これは $\cos\alpha$ を掛けると

$$-\cos(\alpha-\beta_1) = \cos(\alpha-\beta_2)$$

と書ける。それゆえ，入射角は反射角に等しい。

いま一つの質点が，ある媒質の中を速さ $v(x, y)$ で運動しているとすると，その質点が $A(x_0, y_0)$ から $B(x_2, y_2)$ まで動くに要する時間 t は，積分

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y)}\, dx$$

で与えられる。これは上で考えた汎関数族

$$\int_{x_0}^{x_2} A(x, y)\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

に属している。 それゆえ， 速さが任意の 関数 $v(x, y)$ で与 えられたときでさえ，反射点における入射角は反射角に等しい。

もし点 A と B が前とはいくらか違った配置， たとえば図27 のようになっているならば， $y = y(x)$ は一価関数 ではなくなるので， われわれは この問題をパラメーター表示で調べなければならない。

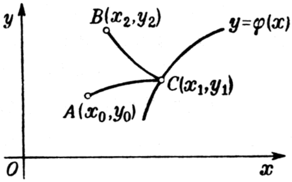


図　27.

極値曲線の屈折　汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

の被積分関数 F が，F の領域における一つの曲線 $y=\varphi(x)$ に沿って不連続になっているものと仮定しよう。そして端点 A と B はその曲線の反射側にあると仮定しよう（図28）。（そのような曲線は不連続曲線とよばれる。）

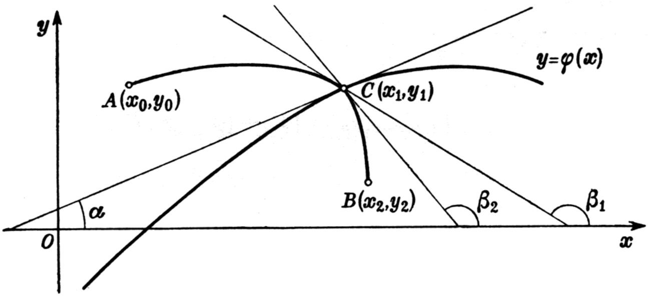


図　28.

さて，汎関数 v を

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y')dx+\int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y')dx$$

の形に書こう。ここに $F_1(x, y, y')$ は不連続曲線の一方の側で $F(x, y, y')$ に等しい関数であり，$F_2(x, y, y')$ は他方の側で，$F(x, y, y')$ に等しい関数とする。

さらにわれわれは F_1 と F_2 は三階導関数をもつと仮定する。極値を与える曲線と，不連続曲線の交点 C は尖点になるだろうと考えるのがもっともらしい。径路 AC と CB は，もちろん極値曲線である。なぜなら，ふたたびこれらの径路の一方が固定されていて，他方を変化させると考えると，固定された端点をもつ問題になるからである。それゆえ，比較曲線族は，二つの極値曲線から成る，角をもっているすべての曲線に制限することができる。そして尖点 $C(x_1, y_1)$ は動きうるから，曲線 $y=\varphi(x)$ に沿って動くときの，その変分は

$$
\begin{aligned}
\delta v &= \delta \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y')\,dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y')\,dx \\
&= [F_1 + (\varphi' - y')F_{1y'}]_{x=x_1-0}\,\delta x_1 - \\
&\qquad - [F_2 + (\varphi' - y')F_{2y'}]_{x=x_1+0}\,\delta x_1
\end{aligned}
$$

である（63 頁を参照されたい。）

したがって，極値に対する基本的な必要条件 $\delta v = 0$ はつぎの方程式に帰着される：

$$
[F_1 + (\varphi' - y')F_{1y'}]_{x=x_1-0} = [F_2 + (\varphi' - y')F_{2y'}]_{x=x_1+0}
$$

屈折点では y' だけが連続でなくなるから，この後者の**屈折条件**はつぎのように書き下すことができる：

$$
\begin{aligned}
& F_1\big(x_1, y_1, y'(x_1-0)\big) + \\
&\qquad + \big(\varphi'(x_1) - y'(x_1-0)\big) F_{1y'}\big(x_1, y_1, y'(x_1-0)\big) \\
&= F_2\big(x_1, y_1, y'(x_1+0)\big) + \\
&\qquad + \big(\varphi'(x_1) - y'(x_1+0)\big) F_{2y'}\big(x_1, y_1, y'(x_1+0)\big)
\end{aligned}
$$

この屈折条件と方程式 $y_1 = \varphi(x_1)$ とをともに用いれば，点 C の座標を計算することができる。

とくに，もし汎関数 v が

$$\int_{x_0}^{x_2} A(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_1} A_1(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx+\int_{x_1}^{x_2} A_2(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

の形であれば，そのとき屈折条件はつぎの形をとる：

$$A_1(x, y)\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=x_1-0}=A_2(x, y)\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=x_1+0}$$

あるいは，80 頁のときと同様な記号を用いて，簡単化を行なえば

$$y'(x_1-0)=\tan\beta_1,\qquad y'(x_1+0)=\tan\beta_2,$$
$$\varphi'(x_1)=\tan\alpha$$

となり，$\cos\alpha$ をかけると

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)}$$

あるいは

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi-(\alpha-\beta_1)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi-(\alpha-\beta_2)\right)}=\frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)}$$

が得られる。これは，よく知られた光の屈折の原理の一般化である。入射角の正弦と，屈折角の正弦の比は対応する速さ

$$v_1(x, y)=\frac{1}{A_1(x, y)},\qquad v_2(x, y)=\frac{1}{A_2(x, y)}$$

の比に等しい。ただし，v_1, v_2 は屈折の起こる境界の両側の媒質における速さである（80 頁を参照されたい。）

われわれは，これらの例によって，角をもつ極値曲線が生ずる問題は反射あ

るいは屈折の問題だけであるという，間違った考えに導かれてはならない。汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx$$

の被積分関数 F がすべての三階導関数をもち，すべての許された曲線は，固定された二つの端点を通るという仮定のほかには，それ以上何の条件にもしばられていないときでさえ，極値が角をもつ極値曲線において生ずることがありうるのである。

汎関数

$$v=\int_0^2 y'^2(1-y')^2dx \qquad y(0)=0, \qquad y(2)=1$$

を調べてみよう。

被積分関数は正であるから，$v\geqslant 0$ であって，それゆえ，もしある曲線において $v=0$ になるような曲線があれば，その曲線は確かに v を絶対的な最小にする。すなわちそのような曲線は，許された曲線において v のとるすべての値のうちで v の最小値を与える。汎関数 v は，つぎの折れ線において 0 になることは容易にわかる（図 29）：

$$y=x \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,$$
$$y=1 \qquad 1\leqslant x\leqslant 2$$

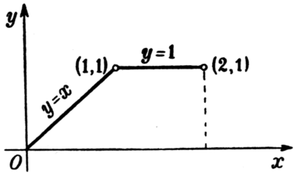


図 29.

それはこの曲線において被積分関数が 0 になるからである。したがって，この折れ線が v を絶対的な最小にする。

この汎関数 v は，図 31 に示されている折れ線においても絶対的な最小値をもっている。一方，すべての滑らかな曲線においての汎関数 v の値は，0 に任意に近づくことはあっても，必ず正である。事実，被積分関数は $y=x+C_1$ あるいは $y=C_2$ のときにのみ 0 になる。他方，線分から成り，点 $A(0,0)$ と $B(2,1)$ を通る曲線は折れ線であるほかはない。しかしながら，そのような折れ線をとったとき，われわれは，その折れ線の角の点の任意に小さい近傍のなかの，任意に小さい部分を変形させて，それを滑らかな曲線にすることができる。そして，そのようにして得られた曲線における汎関数の値は，始めの折れ線における汎関数の値に，いくらでも近くなるだろう。したがって，$v=0$ は正確に，滑らかな曲線において v のとる値の最大下界である。この最大下界は，どんな滑らかな曲線によっても達せられることはない。この値は断片的に滑らかな曲線においてのみ達せられる。

つぎにわれわれは，汎関数

$$v(y(x))=\int_{x_0}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

の極値問題の，**角をもつ解が満足すべき条件**を求めよう。

角をもつ極値曲線の一部をなす滑らかな部分弧が，オイラーの方程式の積分曲線の弧の一部と一致しなければならないことは明らかである。すなわち与えられた極値曲線を構成する多くの滑らかな部分弧のうち，一つを除いて他のすべてを固定して，この一つの滑らかな部分弧を変化させると，これは固定端点をもつ簡単な問題になる。それゆえ，この部分弧は一つの極値曲線上になければならない。

明確さのために，われわれは見出さねばならない極値曲線は，ただ一つの尖点[1] をもつと仮定し，この曲り角の点において，満足しなければならないある条件を見出すことを試みよう。

$$v=\int_{x_0}^{x_2}F(x,y,y')dx=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx+\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

---

[1] もし多くの尖点があれば，以下の議論はそれらの尖点の各々に対して別々に適用される。

とする。ここに x_1 は尖点の x-座標である（図 30)。曲線 AC および CB はオイラーの方程式の積分曲線であり，また C は任意に変わるから，II 章 1 節から

$$\delta v=(F-y'F_{y'})|_{x=x_1-0}\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1-0}\,\delta y_1-$$
$$-(F-y'F_{y'})|_{x=x_1+0}\delta x_1-F_{y'}|_{x=x_1+0}\,\delta y_1=0$$

が導かれる。それゆえ，つぎのようになる：

$$(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1-0}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=x_1-0}\delta y_1$$
$$=(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1+0}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=x_1+0}\delta y_1$$

あるいは，δx_1 と δy_1 は独立であるから

$$(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1-0}=(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1+0}$$

および

$$F_{y'}\big|_{x=x_1-0}=F_{y'}\big|_{x=x_1+0}$$

が得られる。これらの条件と，尖点における連続の条件をともに用いれば，この尖点の座標を決定するのに十分である。

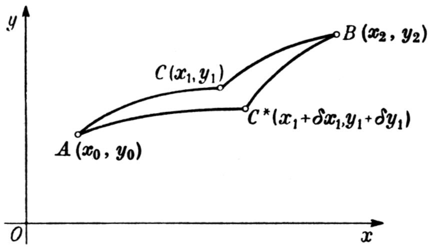


図 30.

例題 1. もしあれば，汎関数

$$v=\int_0^a (y'^2-y^2)\,dx$$

に対する角をもつ極値曲線を見出せ。

尖点において満足されなければならない。第二条件，$F_{y'}|_{x=x_1-0} = F_{y'}|_{x=x_1+0}$ を書き下そう。いまの場合にはこれは $2y'(x_1-0) = 2y'(x_1+0)$ であって，結局2を約して $y'(x_1-0) = y'(x_1+0)$ となる。すなわち導関数 y' は点 x_1 において連続であって，それゆえ尖点は一つもない。したがって，この場合には，極値は滑らかな曲線においてのみ生ずることができる。

例題 2. 汎関数

$$v = \int_{x_0}^{x_2} y'^2(1-y')^2\,dx$$

に対して，角をもつ極値曲線を見出せ。

被積分関数は y' のみによるから，極値曲線は直線 $y = Cx+C^*$ であることがわかる（26 頁を見よ）。角の点における条件は

$$-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1-0} = -y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1+0}$$

および，

$$2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1-0} = 2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1+0}$$

の形になる。

$$y'(x_1-0) = y'(x_1+0)$$

という自明の場合をのぞけば，これらの条件が満足されるのは

$$y'(x_1-0) = 0 \quad \text{および} \quad y'(x_1+0) = 1$$

かあるいは

$$y'(x_1-0) = 1 \quad \text{および} \quad y'(x_1+0) = 0$$

のときである。

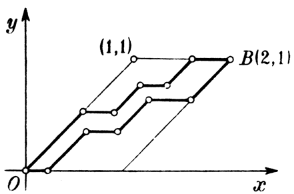


図　31.

その結果，角をもつ極値曲線は，直線族，$y = C_1$ および $y = x + C_2$ のある区間のみから構成されるものである（図 31）。

5. 片側変分

汎関数 $v(y(x))$ の極値を見出すある種の問題では，許される曲線族が，ある閉曲線 $\Phi(x, y) = 0$（図 32）でかこまれた領域 R の内部を通ってはならないという，制限がつけられることがときどきある。そのような場合には，極値を与える曲線 C は，つぎの二つの場合のうち，いずれかでなければならない。

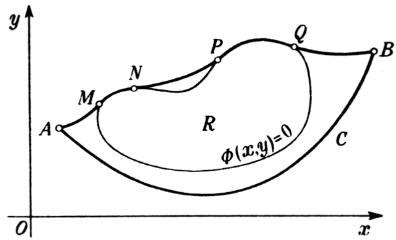


図 32.

すなわち，その曲線が領域 R の境界の全く外側を通り，したがって一つの極値曲線である場合，このときには R の存在は曲線 C のある近傍における v の振舞いには何の影響も及ぼさないから，I 章の議論がそのまま適用できるわけである。もう一つは，曲線 C が，R の境界の外にある径路と，R の境界に沿う径路から成っている場合である。後者の場合には，R の境界に沿う曲線部分で新しい事態が生じてくる。そこでは，R の内部を通る許された曲線が存在しないので，片側変分だけが可能である。R の外にある曲線部分は，前と同じように極値曲線でなければならない。なぜなら，曲線 C を両側変分が許される部分だけで変化させるならば，R の存在は $y(x)$ の変分には何の影響も与えず，I 章の結論がそのまま有効だからである。

それゆえ，考えている場合においては，極値は，一部は極値曲線，一部は R の境界から成るような曲線においてのみ生ずることができ，したがって極値を与える曲線を決定するためには，極値曲線が R の境界の一部とつながる点の

ところで，いくつかの条件が必要になる。これらの条件から結合点が決定されるであろう。図 **33** に示されているような場合には，このような条件を点 M, N, P, Q において導きだそう。例として，点 M におけるそのような条件を求めてみよう。残りの点における条件も，同じようにして得られる。

汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx=\int_{x_0}^{x^*} F(x, y, y')dx+\int_{x^*}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

の変分 δv を計算するにあたって，われわれは，この変分が曲線 $\Phi(x, y)=0$ の上における点 $M(x, y)$ の変位によって完全に決定されると仮定することができる。すなわち，曲線 $\Phi(x, y)=0$ 上の点 M の各位置に対して，弧 AM は常に一つの極値曲線であり，$MNPQB$ は固定されたままであると仮定することができる（図 **33**）。

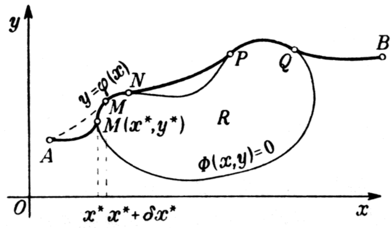


図　33.

汎関数

$$v_1=\int_{x_0}^{x^*} F(x, y, y')dx$$

は動きうる上限 x^* をもっており，x^* は方程式 $\Phi(x, y)=0$ で与えられる R の境界に沿うて動くことができる。この方程式を点 M の近傍で y に関して，陽の形に書いたものを $y=\varphi(x)$ とする。

そうすると，**II** 章 **1** 節によって

$$\delta v_1=[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x^*}\delta x^*$$

である。汎関数

$$v_2 = \int_{x^*}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

も変化する積分限界点 (x^*, y^*) をもってはいるが，この点の近傍では，曲線 $y = \varphi(x)$ は変化しない。したがって点 (x^*, y^*) が点 $(x^* + \delta x^*, y^* + \delta y^*)$ へ変位したことによる汎関数 v_2 の全変化は，積分の下限の変化にもとづくものだけになってしまう。

$$\Delta v_2 = \int_{x^*+\delta x^*}^{x_1} F(x, y, y')\,dx - \int_{x^*}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

$$= -\int_{x^*}^{x^*+\delta x^*} F(x, y, y')\,dx = -\int_{x^*}^{x^*+\delta x^*} F\bigl(x, \varphi(x), \varphi'(x)\bigr)\,dx$$

最後の変形には区間 $(x^*, x^* + \delta x^*)$ では $y = \varphi(x)$ であることを用いた。

平均値の定理を適用し，関数 F の連続性を用いれば

$$\Delta v_2 = -F\bigl(x, \varphi(x), \varphi'(x)\bigr)\Big|_{x=x^*} \delta x^* + \beta\,\delta x^*$$

が得られる。ここに $\delta x^* \to 0$ と共に $\beta \to 0$ である。

したがって，$y(x^*) = \varphi(x^*)$ であることに注意すれば

$$\delta v_2 = -F\bigl(x, \varphi(x), \varphi'(x)\bigr)\Big|_{x=x^*} \delta x^*,$$

$$\begin{aligned}\delta v &= \delta v_1 + \delta v_2 \\ &= [F(x, y, y') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y')]_{x=x^*} \delta x^* - \\ &\qquad\qquad - F(x, y, \varphi')\big|_{x=x^*} \delta x^* \\ &= [F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi') F_{y'}(x, y, y')]_{x=x^*} \delta x^*\end{aligned}$$

が得られる。

δx^* は任意であるから，極値に対する必要条件 $\delta v = 0$ はつぎの形をとる：

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi') F_{y'}(x, y, y')]_{x=x^*} = 0$$

平均値の定理を適用すれば

$$(y'-\varphi')[F_{y'}(x, y, q)-F_{y'}(x, y, y')]_{x=x^*}=0$$

を得る。ここに q は $\varphi'(x^*)$ と $y'(x^*)$ の間のある値である。もう一度，平均値の定理を適用すれば

$$(y'-\varphi')(q-y')F_{y'y'}(x, y, q^*)_{x=x^*}=0$$

が得られる。ここに q^* は q と $y'(x^*)$ の間のある値である。さらに，ここで $F_{y'y'}(x, y, q^*) \neq 0$ と仮定しよう。この仮定は，多くの変分の問題に対して本質的なものであることが，後でわかるであろう（III 章参照）。この仮定をおくと，点 M における条件は $y'(x^*)=\varphi'(x^*)$ となる。なぜなら，q は常に $y'(x^*)$ と $\varphi'(x^*)$ の間にあるから，$y'(x^*)=\varphi'(x^*)$ のときに限り $q=y'$ となるからである。

それゆえ，点 M においては，極値曲線の弧 AM と，境界線の弧 MN とは共通の接線をもっている。これは曲線 $y=y(x)$ の左方接線と，曲線 $y=\varphi(x)$ の右方接線が一致するということである。したがって，極値曲線は常に領域 R の境界上の点 M において境界に接している。

6. 混合問題

われわれは，ときどき汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx+\Phi(x_0, y_0, x_1, y_1)$$

の極値を調べなければならないことがある。ここで端点の座標 (x_0, y_0)，(x_1, y_1) にはそのうえ他の条件，たとえば $y_0=\varphi(x_0)$ および $y_1=\psi(x_1)$ が課されることもある。あるいは汎関数が

$$v=\iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy+\int_C \Phi ds$$

の形のことがある。ここに C は積分領域 D を囲む変化しうる境界曲線であ

って，ds はその弧の長さの要素である。あるいは汎関数が

$$v=\iiint_W F\left(x,y,z,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)dxdydz+\iint_S \Phi dS$$

の形である場合もある。このとき S は積分領域 W を囲む変化しうる境界面である。このような問題は**混合変分問題**（*mixed variational problem*）とよばれる。それは，何等かの仕方でお互いに関係づけられている異なる種類の，二つの汎関数の和の極値を調べなければならないからである。

この問題を解く方法は，基本的な変分問題の解法と同じであるが，境界条件がもっと複雑である。たとえば，汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx+\Phi(x_0,y_0,x_1,y_1)$$

の極値を見出す混合問題を考えよう。一つの極値は，オイラーの方程式

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

の解においてのみ生じうることは明らかである。その理由はつぎの通りである。もしある曲線 C が，変化する端点をもつ問題に対して汎関数 v に極値をとらせるならば，そのような曲線は，曲線 C と同じ端点をもつもっと限られた許された曲線族に対しても，やはり極値を与えることになるからである。そしてそのような曲線において考えると，汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx+\Phi(x_0,y_0,x_1,y_1)$$

と汎関数

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$$

との違いは定数項 $\Phi(x_0,y_0,x_1,y_1)$ だけであり，この項は同じ端点をもつ曲

線族について考えるとき，汎関数が極値をとるという性質には，なんの影響も及ぼさないからである。

さて，隣接する曲線が常に極値曲線であると仮定して (62-63 頁を参照)，変分 δv を計算しよう。すなわち

$$\delta v = [(F - y' F_{y'})\,\delta x_1 + F_{y'}\,\delta y_1]_{x=x_1} - \\ -[(F - y' F_{y'})\,\delta x_0 + F_{y'}\,\delta y_0]_{x=x_0} + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\delta y_1$$

もし境界点 (x_0, y_0) と (x_1, y_1) が，あらかじめ指定された曲線 $y_0 = \varphi(x_0)$，と $y_1 = \psi(x_1)$ に沿うて動くことができるならば $\delta y_0 = \varphi'(x_0)\,\delta x_0$，および $\delta y_1 = \psi'(x_1)\,\delta x_1$ であって，極値に対する必要条件はつぎの形をとる：

$$\left[F + F_{y'}(\psi' - y') + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\psi'\right]_{x=x_1}\delta x_1 - \\ -\left[F + F_{y'}(\varphi' - y') - \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}\varphi'\right]_{x=x_0}\delta x_0 = 0$$

δx_0 と δx_1 は独立であるから，最後に

$$\left[F + F_{y'}(\psi' - y') + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\psi'\right]_{x=x_1} = 0$$

および

$$\left[F + F_{y'}(\varphi' - y') - \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}\varphi'\right]_{x=x_0} = 0$$

を得る。

多重積分を含む混合問題に対する変分を計算するためには，変化する境界をもつ多重積分の変分を計算しなければならない。

問　　題

1.　汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^4 (y'-1)^2(y'+1)^2 dx \qquad y(0)=0, \quad y(4)=2$$

の極小値の問題に対して，一つの角をもつ解を見出せ。

2.　汎関数

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx \qquad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1$$

の極値問題に対して尖点をもつ解が存在するか。

3.　汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^{x_1} y'^3 dx \qquad y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1$$

の極値問題に対して，尖点をもつ解が存在するか。

4.　汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^{x_1} (y'^4 - 6y'^2) dx \qquad y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1$$

の極値問題に対して，尖点をもつ解が存在するか。

5.　汎関数

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) e^{\arctan y'} \sqrt{1+y'^2} dx \qquad A(x, y) \neq 0$$

に対して，横断性の条件を見出せ。点 (x_1, y_1) において $y_1 = \varphi(x_1)$ とする。

6.　極値に対する基本的な必要条件 $\delta v = 0$ を用いて，汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^1 (y''^2 - 2xy) dx$$

を極値にすることができる一つの関数を見出せ。ただし，

$$y(0)=y'(0)=0,\quad y(1)=\frac{1}{120},\quad y'(1)\text{ は任意}$$

と仮定する。

7. 汎関数

$$v(y(x))=\int_0^{10} y'^3\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(10)=0$$

を，許された曲線が，円

$$(x-5)^2+y^2=9$$

の内部を通ることはできないという条件の下で，極値にすることができる曲線を見出せ。

8. 汎関数

$$v(y(x))=\int_0^{\pi/4} (y^2-y'^2)\,dx,\quad y(0)=0$$

を極値にする関数を求めよ。ただし，もう一つの端点は直線 $x=\pi/4$ に沿うて滑ることができるものと仮定する。

9. 基本的な必要条件 $\delta v=0$ だけを用いて，汎関数

$$v(y(x))=\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx,\quad y(0)=0$$

を極値にする曲線を見出せ。ここで残りの点 (x_1, y_1) は円 $(x-9)^2+y^2=9$ の周上を動き得るものとする。

10. 曲線 $y=\varphi(x)$ 上に存在しない一点 $A(x_0, y_0)$ から出発して，最小の時間で曲線 $y=\varphi(x)$ 上にある点 $C(x_2, y_2)$ に到達しなければならない。曲線 $y=\varphi(x)$ の外では速さは一定で，その値は v_1 である。曲線 $y=\varphi(x)$ に沿って動く速さも一定であるが，その値は v_2 であって，$v_2>v_1$ である。この場合の径路を決定せよ。

III 章

極値に対する十分条件

1. 極値曲線の場

もし，平面 Oxy 上の領域 D の各点に対して，曲線族 $y=y(x, C)$ に属する曲線が正確に一つ存在するならば，領域 D におけるこの曲線族は**場**(*field*) あるいは，より正確には**固有場** (*proper field*) とよばれる。点 (x, y) における曲線 $y=y(x, C)$ の接線の傾き $p(x, y)$ は点 (x, y) における**場の傾き** (*slope of the field*) とよばれる。

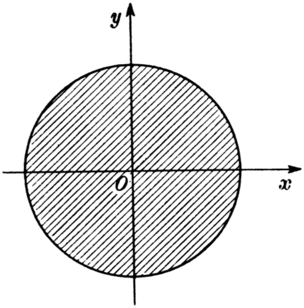


図 34.

たとえば，平行な直線族 $y=x+C$ は，円 $x^2+y^2=1$ の中で一つの場をつくっている (図 34)。この場の傾きは $p(x, y)=1$ である。他方，放物線族 $y=(x-a)^2-1$ は同じ円の中で場ではない。なぜなら，この円の内部で，ある放物線は他の放物線と交わるからである (図 35)。

もし，ある曲線族 $y=y(x, C)$ に属するすべての曲線が，一つの点 (x_0, y_0) を通るならば，すなわち曲線束を形成しているときには，その曲線束の中心が

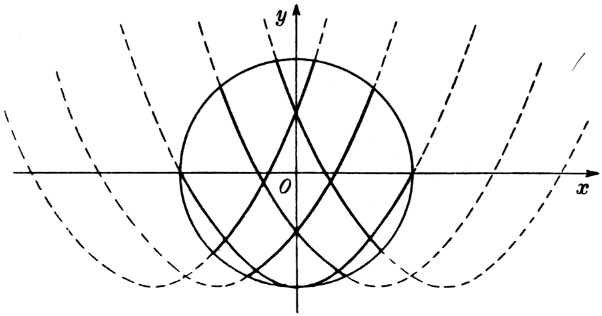


図 35.

D に属するときには，常にその曲線族は領域 D において固有場を形成しないことはいうまでもない。しかしながら，その曲線束の曲線が，領域 D 全体をおおい，この領域の中で曲線束の中心を除いては，お互いに交わることがないならば，すなわち場であるための条件が，曲線束の中心以外のすべての点で成り立っているときには，われわれはやはり曲線族 $y = y(x, C)$ は場であるというが，このような場を固有場と区別するためには，**中心場**（***central field***）とよぶ（図 **36**）。

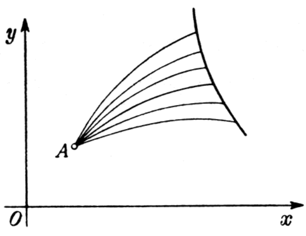


図 36.

たとえば，正弦曲線束 $y = C\sin x$ は $a < \pi$ として，x-軸上の区間 $0 \leqslant x \leqslant a$ の十分小さい近傍において，中心場を形成している（図 **37**）。同じ正弦曲線束は，$\delta > 0$, $a < \pi$ として，x-軸上の区間 $\delta \leqslant x \leqslant a$ の十分小さい近傍では，固有場を形成している（図 **37**）。

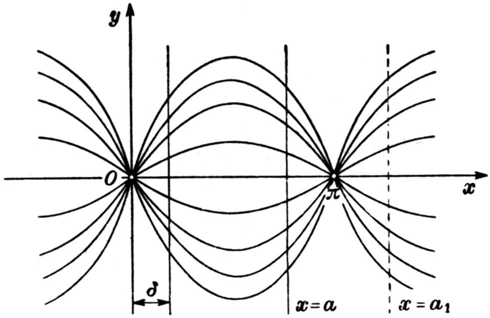


図　37.

もし一つの固有場あるいは中心場が，ある変分問題に対する極値曲線によってつくられているならば，その場は**極値曲線の場**（***field of extremals***）とよばれる。

極値曲線の場の概念は，ほとんど変更することなしに，任意の次元の空間にまで拡張される。曲線族 $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は，もし $(x, y_1, \ldots, y_n)$ でつくられる $n+1$ 次元領域 D の各点を，この曲線族の曲線のうちの，一つだけが通るならば，この領域 D において**場**であるといわれる。点 $(x, y_1, \ldots, y_n)$ における関数 $y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ の x に関する偏導関数は**傾きの関数**（***slope function***）とよばれ，$p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ と書かれる。$p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を計算するためには，関数 $y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ をとって，その中の各定数 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ で表わす公式で，おきかえなければならない。中心場も同じようにして，定義することができる。

曲線 $y = y(x)$ が，もっとも簡単な汎関数

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

の極値を見出す変分問題の一つの極値曲線であるとする。また端点 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ は固定されているものとする。さて，もし領域 D において場をつくる一つの極値曲線族 $y = y(x, C)$ があって，$C = C_0$ という特定の値に対して，$y(x, C_0)$ が領域 D の境界の上にない極値曲線 $y = y(x)$ に一致す

るならば，その極値曲線 $y = y(x)$ は極値曲線の場において許された曲線であるという（図 **38**）。点 $A(x_0, y_0)$ に中心をもつ極値曲線束が，この点を通る一つの極値曲線 $y = y(x)$ のある近傍で場をつくるならば，もちろん，与えられた極値曲線を含む中心場が存在する。その曲線族のパラメーターとして，われわれは点 $A(x_0, y_0)$ における，曲線束の各曲線の接線の傾きをとることができる（図 **39**）。

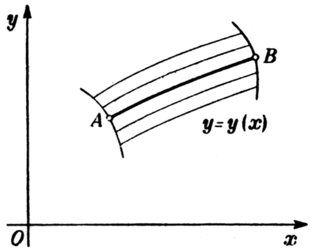


図　38.

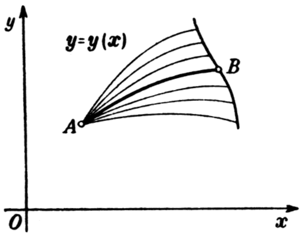


図　39.

例題　1.　汎関数

$$\int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx$$

が与えられるとき，$0 < a < \pi$ として点 $(0, 0)$ と $(a, 0)$ を結ぶ極値曲線の弧 $y = 0$ を含む中心場を見出せ。

オイラーの方程式 $y'' + y = 0$（22 頁例題 **1** 参照）の一般解は $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ である。求める極値曲線は点 $(0, 0)$ を通らなければならないから，$C_1 = 0$, $y = C_2 \sin x$ であって，それゆえ $a < \pi$ として区間 $0 \leqslant x \leqslant a$ においてこの曲線束は，$C_2 = 0$ のときの $y = 0$ を含んだ中心場を形成する。この曲線族のパラメーター C_2 は点 $(0, 0)$ における導関数 y'_x の値である。同じ問題で，もし $a \geqslant \pi$ であれば，曲線族 $y = C_2 \sin x$ は場ではない（図 **37** を見よ）。

よく知られているように，曲線族 $F(x, y, C) = 0$ の中の二つの無限に近い曲線は，**C-判別式**（**C-discriminant**）

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0$$

によって決定される軌跡の上の点で交わる。

特に，C-判別式の軌跡は，その曲線族の包絡線と，その曲線族に属する曲線の重複点の軌跡とから成っていることを思い出そう。もし $F(x, y, C) = 0$ が曲線束の方程式であれば，その曲線束の中心も C-判別式の軌跡の上にある。

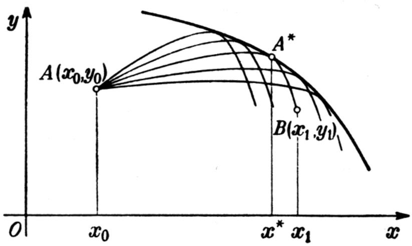


図　40.

それゆえ，点 (x_0, y_0) を通る極値曲線 $y = y(x, C)$ の束をとって，C-判別式の軌跡 $\Phi(x, y) = 0$ を決めるならば，曲線族 $y = y(x, C)$ のどの隣接する二つの曲線も，曲線 $\Phi(x, y) = 0$ の近くの点において交わる。とくに，点 $A(x_0, y_0)$ と点 $B(x_1, y_1)$ を通る与えられた極値曲線 $y = y(x)$ に隣接する曲線族の中のどの二つの曲線も，曲線 $y = y(x)$ が C-判別式の軌跡に接触する点の近くで交わることになる（図 **40** を見よ。そこでは C-判別式の軌跡は太い線で示されている）。もし極値曲線 $y = y(x)$ の弧 AB が，与えられた極値曲線を含む極値曲線束の C-判別式の軌跡と共通点をもたないならば，その束の中で弧 AB に十分近い極値曲線は交わらない。すなわち，その曲線束は弧 AB のある近傍で，弧 AB を含む中心場をつくることになる（図 **41**）。

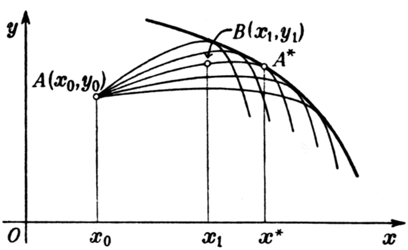


図　41.

もし一つの極値曲線 $y=y(x)$ の弧 AB が，曲線束 $y=y(x,\ C)$ の C-判別式の軌跡と，A とは異なった共通点 A^* をもつならば，$y=y(x)$ に隣接する曲線は点 A^* の近傍でお互いに，あるいは曲線 $y=y(x)$ と交わるであろう。それゆえ，一般にその曲線束は場をつくらない（図40）。A^* は A に**共役な**（***conjugate***）点とよばれる。

この結果はつぎのようにのべることができる。点 A を中心とし，一つの極値曲線の弧 AB を含む，極値曲線の中心場をつくるためには，点 A に共役な点 A^* が弧 AB 上にないことが十分な条件である。あらかじめ指定された極値曲線を含む極値曲線の中心場をつくることができるためのこの条件は，**ヤコビの条件**（***Jacobi's condition***）とよばれる。

この条件を解析的な形に書きかえることは困難ではない。$y=y(x,C)$ を点 A を中心にもつ極値曲線束の方程式としよう。ここに，パラメーター C は点 A における曲線束の中の極値曲線の傾き y' と考えておいてよい。C-判別式の軌跡は，方程式

$$y=y(x,C),\qquad \frac{\partial y(x,C)}{\partial C}=0$$

によって決定される。曲線族の任意のどれか一つの曲線に沿うてとられた導関数 $\partial y(x,C)/\partial C$ は，x のみの関数になる。この関数を u で表わそう。すなわち，$u=\partial y(x,C)/\partial C$ である。ここで C はは固定されている。このようにして $u'_x=\partial^2 y(x,C)/\partial C\partial x$ となる。関数 $y=y(x,C)$ はオイラーの方程式の解であるから

$$F_y\bigl(x,y(x,C),y'_x(x,C)\bigr)-\frac{d}{dx}F_{y'}\bigl(x,y(x,C),y'_x(x,C)\bigr)\equiv 0$$

である。この恒等式を C に関して微分して，$\partial y(x,C)/\partial C=u$ とおけば

$$F_{yy}u+F_{yy'}u'-\frac{d}{dx}(F_{yy'}u+F_{y'y'}u')=0$$

あるいは

$$(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'})u-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}u')=0$$

が得られる。関数 $F_{yy}(x,y,y')$, $F_{yy'}(x,y,y')$, $F_{y'y'}(x,y,y')$ は x についての既知の関数である。なぜなら，第二の変数 y は，与えられた極値曲線 AB に対応する値 $C=C_0$ における，オイラーの方程式の解 $y=y(x,C)$ によって与えられるからである。この u に関する二階線形同次方程式は**ヤコビの方程式**（*Jacobi's equation*）とよばれる。

もしこの方程式の解 $u=\partial y(x,C)/\partial C$ が曲線束の中心において，すなわち $x=x_0$ のときに 0 になり（曲線束の中心は常に C-判別式の軌跡の上にある），また区間 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ のなかの x_0 と異なる点で 0 になれば，A に共役な点 A^* は方程式

$$y=y(x,C_0) \quad と, \quad \frac{\partial y(x,C)}{\partial C}=0 \quad あるいは \quad u=0$$

によって決定され，そしてその点は極値曲線の弧 AB の上にある。[1]

もしヤコビの方程式の解で，$x=x_0$ では 0 になるが，区間 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ の他の点では 0 にならないようなものが存在するならば，弧 AB の上には A に共役な点はない。すなわちその場合にはヤコビの条件が満足され，極値曲線の弧 AB は点 A を中心とする極値曲線の場の中に含まれることができる。

〔**注意**〕ヤコビの条件は極値に対する必要条件であること，すなわち極値を与える曲線 AB に対しては，点 A に共役な点が，区間 $x_0<x<x_1$ には存在し得ないことを証明することができる。

例題 2. 汎関数

$$v=\int_0^a (y'^2-y^2)\,dx$$

の点 $A(0,0)$ と $B(a,0)$ を通る極値曲線はヤコビの条件を満足するか。

ヤコビの方程式は

$$-2u-\frac{d}{dx}(2u')=0 \quad すなわち, \quad u''+u=0$$

であり，したがって

(1) 二階線形同次微分方程式の自明でない条件 $u(x_0)=0$ を満足するものは，すべて互いに定数因子だけ違っているにすぎない。したがってそれらの解はすべて同時に 0 になることを思い出そう。

$$u = C_1 \sin(x - C_2)$$

である。$u(0) = 0$ であるから $C_2 = 0$ で，$u = C_1 \sin x$ が導かれる。関数 u は，点 $x = k\pi$ で 0 になる。ここに k はすべての整数値をとる。それゆえもし $0 < a < \pi$ なら，区間 $0 \leqslant x \leqslant a$ において $u = 0$ になる点は $x = 0$ だけしかない。それゆえヤコビの条件が成り立つ。もし $a \geqslant \pi$ ならば，区間 $0 \leqslant x \leqslant a$ のなかに，u が 0 になるような点が少なくとも一つ，$x = \pi$ がある。それゆえヤコビの条件は成立しない（99 頁の例題 1 を参照)。

例題 3. 汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2)\, dx$$

の点 $A(0, 0)$ と点 $B(a, 0)$ を通る極値曲線はヤコビの条件を満足するか。

ヤコビの方程式は $u'' - u = 0$ である。その一般解は $u = C_1 \sinh x + C_2 \cosh x$ の形に書くことができる。$u(0) = 0$ であるから，$C_2 = 0$ で $u = C_1 \sinh x$ になる。さらに曲線束 $u = C_1 \sinh x$ の曲線は x-軸と一点 $x = 0$ で交わるだけである。それゆえ a の値にかかわらずヤコビの条件は成り立つ。

2. 関　数 $E(x, y, p, y')$

汎関数

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

の極値を見出すもっとも簡単な問題に対して，ヤコビの条件が成立し，したがって点 $A(x_0, y_0)$ と $B(x_1, y_1)$ を通る極値曲線 C が傾きの関数 $p(x, y)$ をもつ中心場に含まれるようにすることができると仮定しよう（図 42)。[1] 一つの極値曲線 C から，隣接する他の許された極値曲線 C^* へ移るときに生ずる汎関数 v の増分 Δv の符号を決定するために，増分

[1] この極値曲線は，ある中心場のなかに含まれるのみならず，ある固有場のなかに含ませることもできると仮定することができる。

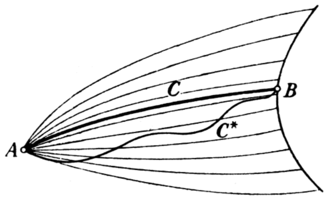


図 42.

$$\Delta v = \int_{C^*} F(x, y, y')dx - \int_C F(x, y, y')dx$$

を調べるのに，もっと都合のよい他の形に変形しよう。

記号

$$\int_{C^*} F(x, y, y')dx \quad \text{および} \quad \int_C F(x, y, y')dx$$

はそれぞれ，弧 C^* および C に沿ってとられた汎関数

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

の値を示す。

付加的な汎関数

$$\int_{C^*} \left(F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p \right) F_p(x, y, p) \right) dx$$

を考えよう。これは極値曲線 C に沿うて計算すれば $\int_C F(x, y, y')dx$ になる。なぜなら，場の極値曲線に沿うては $dy/dx = p$ だからである。他方この同じ付加的な汎関数

$$\int_{C^*} \left(F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p \right) F_p(x, y, p) \right) dx$$

あるいは

$$(1) \qquad \int_{C^*} \big(F(x, y, p) - pF_p(x, y, p)\big)dx + F_p(x, y, p)dy$$

は完全微分の積分である。事実，汎関数 $v\big(y(x)\big)$ を，場の極値曲線だけに，制限することによって得られる関数 $v^*(x, y)$ の微分は，つぎの形をもっている（II 章 1 節，62 頁を参照）：

$$dv^* = \big(F(x, y, y') - y'F_{y'}(x, y, y')\big)dx + F_{y'}(x, y, y')dy$$

そしてこれは付加的な積分 (1) の被積分関数と，単に与えられた場に属する極値曲線の接線の傾きを表わすのに用いた記号が違っているだけである。

したがって，積分

$$\int_{C^*} \big(F + (y' - p)F_p\big)dx$$

は，極値曲線 C に沿うてとるならば積分

$$\int_C F(x, y, y')dx$$

と一致する。そして汎関数

$$\int_{C^*} \big(F + (y' - p)F_p\big)dx$$

は完全微分の積分であって，それゆえ積分の道には関係しないから

$$\int_C F(x, y, y')dx = \int_{C^*} \big(F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p)\big)dx$$

は $C^* = C$ のときのみならず，任意の C^* に対して成立することが導かれる。

それゆえ，増分

$$\Delta v = \int_{C^*} F(x, y, y')dx - \int_C F(x, y, y')dx$$

はつぎのように表わすことができる：

$$\Delta v = \int_{C^*} F(x, y, y')dx - \int_{C^*} \Big(F(x, y, p) + (y'-p)F_p(x, y, p)\Big)dx$$
$$= \int_{C^*} \Big(F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y'-p)F_p(x, y, p)\Big)dx$$

被積分関数は，**ワイヤストラスの関数**（*Weierstrass function*）とよばれて，$E(x, y, p, y')$ で表わされる。

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y'-p)\ F_p(x, y, p)$$

この記号を用いると

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y')dx$$

となる。関数 E が負にならないという要求が，汎関数 v が曲線 C に沿うて一つの極小をもつための，十分条件であることは明らかである。なぜなら，もし $E \geqslant 0$ であれば $\Delta v \geqslant 0$ だからである。極大に対する十分条件は $E \leqslant 0$ である。なぜならこの不等式が成立すれば $\Delta v \leqslant 0$ となるからである。弱い極小（12頁参照）に対しては，不等式 $E(x, y, p, y') \geqslant 0$（あるいは極大に対しては $E \leqslant 0$）が，極値曲線上の x, y に近いすべての x, y と，同じ極値曲線に沿うての $p(x, y)$ の値に近い，すべての y' の値に対して成立すれば十分である。強い極小に対しては，この不等式が上と同じ x, y に対して成立しなければならないが，この場合には y' は任意であってよい。なぜなら，強い極値の場合においては，隣接する曲線は任意の接線方向をもつことができるのに反して，弱い極値に対しては極値曲線 C に隣接する曲線に沿うての y' の値は，極値曲線 C に沿う値 $y' = p$ に近くなければならないからである。

したがって，曲線 C に沿って汎関数 v が極値をとるためには，つぎの条件が十分条件となる。

弱い極値

1. C は境界条件を満足する一つの極値曲線である。

2. この極値曲線 C は一つの極値曲線の場のなかに含ませることができる。（この条件はヤコビの条件で，おきかえてもよい。）

3. 関数 $E(x, y, p, y')$ は曲線 C の十分近くにあるすべての点 (x, y) および $p(x, y)$ に十分近い y' のすべての値に対して定符号をもつ。さらにもし $E \geqslant 0$ なら極小であり，$E \leqslant 0$ なら極大である。

強い極値

1. C は境界条件を満足する一つの極値曲線である。

2. この極値曲線は，一つの極値曲線の場に含ませることができる。
（この条件はヤコビの条件で，おきかえてもよい。）

3. 関数 $E(x, y, p, y')$ は，曲線 C の十分近くにあるすべての点 (x, y) および y' の任意の値に対して定符号をもつ。さらにもし $E \geqslant 0$ なら極小であり，$E \leqslant 0$ なら極大である。

〔**注意**〕ワイヤストラスの条件が，必要条件であることを示すことができる。もっと正確にいえば，つぎの通りである。もしある極値曲線の中心場に属する一つの極値曲線 C の上にある各点に対して，関数 E が反対符号をもつような y' の値があれば，強い極値が生ずることはできない。もしこれと同じ条件が，p にいくらでも近くて，しかも関数 E が符号をかえるような y' の値が存在するという付加的な要求をつけても，成り立つならば，弱い極値も生ずることはできない。

例題 1. 汎関数

$$v = \int_0^a y'^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0$$

の極値を調べよ。

極値曲線は直線 $y = C_1 x + C_2$ である。したがって一つの極値は直線 $y = \frac{b}{a}x$ に沿うて生じうる。点 $(0, 0)$ に中心をもつ直線束 $y = C_1 x$ は，極値曲線 $y = \frac{b}{a}x$ を含む一つの中心場を形成する（図 43）。

関数 E は

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)^2(y' + 2p)$$

である。極値曲線 $y = \frac{b}{a}x$ に沿う傾きの関数は $p = b/a > 0$ であって，もし y' が $p = b/a$ に近い値をとれば $E \geqslant 0$ であり，したがってすぐ上にのべた弱い極値に対す

る十分条件が満たされる。それゆえ，極値曲線 $y=\dfrac{b}{a}x$ に沿うてとられる一つの弱い極値がある。もし y' が任意の値をとってもよいとすれば，$y'+2p$ は任意の符号をとることができ，したがって関数 E の符号は一定に保たれない。それゆえ強い極値に対する十分条件は成立しない。上の注意を用いれば，直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ に沿っては，強い極小は存在しないことを知ることができる。

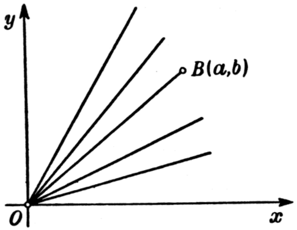


図　43.

例題　2.　連続な一階導関数をもつ連続関数の族の中で，汎関数

$$\int_0^a (6y'^2-y'^4+yy')dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=b, \quad a>0, \quad b>0$$

の極値を調べよ。

極値曲線は直線群 $y=C_1x+C_2$ である。境界条件は直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ に対して成立し，この直線は中心場を形づくる直線束 $y=C_1x$ に含ませることができる。関数 E は

$$\begin{aligned}&E(x,y,p,y')\\&\quad=6y'^2-y'^4+yy'-6p^2+p^4-yp-(y'-p)(12p-4p^3+y)\\&\quad=-(y'-p)^2\left(y'^2+2py'-(6-3p^2)\right).\end{aligned}$$

である。この符号は常に最後の因子

$$(y')^2+2py'-(6-3p^2)$$

の符号と反対である。この因子は，y' が値 $y'=-p\pm\sqrt{6-2p^2}$ を通過するときにのみ 0 になり，そして符号をかえることがありうる。もし $6-2p^2\leqslant 0$ すなわち $p\geqslant\sqrt{3}$

ならば，任意の y' に対して $y'^2+2py'-(6-3p^2)\geqq 0$ である。もし $6-2p^2>0$ すなわち $p<\sqrt{3}$ であるならば，表式 $y'^2+2py'-(6-3p^2)$ は符号を変える。もし同時に y' が p に非常に近いならば，この表式は $p>1$ に対しては正，$p<1$ に対しては負の符号をもつ。

したがって，$p=b/a<1$ すなわち $b<a$ ならば，y' が十分 p に近いとしたとき $E\geqq 0$ であるから，弱い極小が存在する。もし $p=b/a>1$ すなわち $b>a$ であれば，弱い極大が存在する。もし $p=b/a\geqq\sqrt{3}$ であれば，そのときには y' の値の如何によらず $E\leqq 0$ であるから，強い極大が存在する。$p=b/a<\sqrt{3}$ のときには，107 頁の注意から，強い極値は極大も極小も存在しない（図 **44**）。

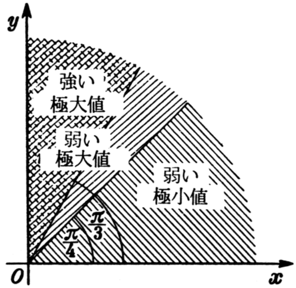


図　44.

このような非常に簡単な例題においてさえ，関数 E の符号を調べることは，いくらか，めんどうなことであった。それゆえ，むしろわれわれは，定符号の条件を，もっと調べやすい何か他の条件で，おきかえるべきであろう。そこで，関数 $F(x,y,y')$ が y' に関して三階の導関数をもつと仮定しよう。テーラーの公式によって

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)F_p(x,y,p)+\\+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q)$$

と書ける。ここに，q は p と y' の間の値である。

公式

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)$$

のなかで関数 $F(x, y, y')$ をテーラーの公式にもとづく公式でおきかえれば

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y'-p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q)$$

が得られる。

この形にすれば，$F_{y'y'}(x, y, q)$ が定符号をもつとすれば，E が定符号であることは，みつけやすい。そこで，もし弱い極値を調べるのであれば，考えている極値曲線に近い点 (x, y) と，$p(x, y)$ に近い q の値に対して，関数 $F_{y'y'}(x, y, q)$ は符号を一定に保たなければならない。もし極値曲線 C に沿うて $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$ であれば，連続性のためにこの二階導関数は，曲線 C に近いすべての点と，曲線 C の対応する点においてとられた y' の値に近い y' のすべての値に対して，符号を一定に保つことになる。それゆえ，弱い極小を調べるときには，条件 $E \geqslant 0$ を，与えられた極値曲線 C に沿うて，不等式 $F_{y'y'} > 0$ が成り立つという条件でおきかえてよい。同じように，弱い極大を調べるときには，条件 $E \leqslant 0$ を，C に沿うて $F_{y'y'} < 0$ の条件でおきかえてよい。条件 $F_{y'y'} > 0$ あるいは $F_{y'y'} < 0$ は**ルジャンドルの条件**（*Legendre condition*）[1] とよばれている。

強い極小を調べようとするときには，条件 $E \geqslant 0$ は，与えられた曲線に近い点 (x, y) と任意の q の値に対して $F_{y'y'} \geqslant 0$ という条件でおきかえてもよい。そのときには，やはり任意の y' に対して，テーラーの公式

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y'-p) F_p(x, y, p) + \\ + \frac{(y'-p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q)$$

が成り立つことを仮定する必要がある。強い極大を調べるためには，変数の領域と，$F(x, y, y')$ に対するテーラー展開の可能性とを，前と同じように仮定すれば，条件として $F_{y'y'}(x, y, q) \leqslant 0$ が得られる。

---

[1] 条件 $F_{y'y'} > 0$ あるいは $F_{y'y'} < 0$ は，しばしば**ルジャンドルの強い条件**（*strong condition of Legendre*）とよばれる。その場合にはさきにのべた**ルジャンドルの条件**は $F_{y'y'} \geqslant 0$ あるいは $F_{y'y'} \leqslant 0$ を意味する。

例題 3. 汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx, \quad a > 0, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0$$

の極値を調べよ。

オイラーの方程式は $y'' + y = 0$ であって，その一般解は $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ である。境界条件を用いると，k を任意の整数として $a \neq k\pi$ であれば，$C_1 = 0$, $C_2 = 0$ が得られる。

それゆえ，もし $a \neq k\pi$ ならば，極値は直線 $y = 0$ に沿うてのみ生じることができる。もし $a < \pi$ であれば，点 $(0, 0)$ に中心をもつ極値曲線束 $y = C_1 \sin x$ は中心場を形成する。もし $a > \pi$ であれば，ヤコビの条件は成立しない（102頁例題2を参照）。

被積分関数は任意の y' に対して y' に関する三階導関数をもっており，y' には無関係に $F_{y'y'} = 2 > 0$ であるから，もし $a < \pi$ ならば直線 $y = 0$ は，v を強い極小にすることが導かれる。102頁の注意を思い出せば，$a > \pi$ のときには $y = 0$ に沿って v の極小はないことがわかる。

例題 4. 汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$$

の極値を調べよ（30頁の最速降下線の問題を参照）。

極値曲線はサイクロイドである。すなわち，つぎのように表わされる：

$$x = C_1(t - \sin t) + C_2, \quad y = C_1(1 - \cos t)$$

点 $(0, 0)$ に中心をもつサイクロイド曲線束，$x = C_1(t - \sin t)$, $y = C_1(1 - \cos t)$ は，極値曲線

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

を含む中心場を形づくる。ここに a は，求めるサイクロイドが，$x_1 < 2\pi a$ と仮定して，第二の境界点 $B(x_1, y_1)$ を通らなければならないという条件によって決定される（図 45）。

さて，任意の y' に対して

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}, \quad F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}\,(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

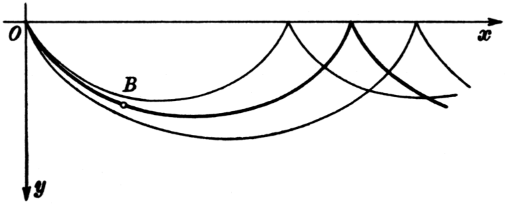


図 45.

が得られる。したがって，$x_1 < 2\pi a$ に対しては，サイクロイド

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

が強い極小を与える。

例題 5. 汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^a y'^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0$$

の極値を調べよ。

この例題はすでに107頁で解かれている。しかし，いまでは弱い極値を調べることが簡単化される。

極値曲線は直線である。直線束 $y = Cx$ は $y = \frac{b}{a}x$ を含む中心場を形成する。極値曲線 $y = \frac{b}{a}x$ に沿ってとられた二階導関数は $F_{y'y'} = 6y' = 6\frac{b}{a} > 0$ である。したがって直線 $y = \frac{b}{a}x$ は弱い極小を与える。もし y' が任意であれば，二階導関数 $F_{y'y'} = 6y'$ は符号を一定に保たない。さきにのべた強い極小に対する十分条件はどれも満たされない。しかしながら，われわれは強い極値が全く存在しないと結論することはできない。

例題 6. 汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^a \frac{y}{y'^2} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad 0 < b < 1$$

の極値を調べよ。

オイラーの方程式の積分曲線〔28 頁の(5)を参照〕はつぎの形である：

$$\frac{y}{y'^2}+y'\frac{2y}{y'^3}=C \quad \text{すなわち} \quad y'^2=4C_1y$$

平方根をとって変数を分離してから積分すれば，$y=(C_1x+C_2)^2$ を得る。これは放物線族である。$y(0)=1$ の条件から，$C_2=1$ が得られる。点 $A(0, 1)$ に中心をもつ放物線束 $y=(C_1x+1)^2$ は，その C_1-判別式の軌跡として $y=0$ をもっている（図 46)。

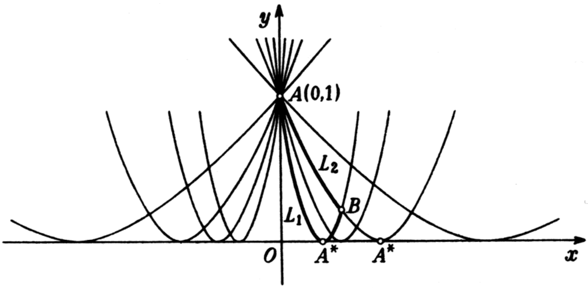


図　46.

点 $B(a, b)$ を通るこの曲線束に属する二つの放物線がある。これらの放物線の一つの弧 AB (L_1) の上には点 A に共役な点 A^* が存在する。他の放物線の弧 AB (L_2) は A に共役な点を含まない。それゆえ，ヤコビの条件は弧 L_2 に対しては成立し，したがってこの弧は一つの極値を与えるであろう。この極値曲線の弧の近傍では，任意の y' に対して $F_{y'y'}=6y/y'^4>0$ であるが，しかし，L_2 に沿うて強い極小が存在するということは導かれない。なぜなら，関数 $F(x, y, y')=y/y'^2$ は，任意の y' に対して

$$F(x, y, y')=F(x, y, p)+(y'-p)F_p(x, y, p)+ \\ +\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, q)$$

の形には表わすことができないからである。それは関数 $F(x, y, y')$ は $y'=0$ に対して不連続であることによるのである。いえることは，L_2 に沿うて弱い極小があるということだけである。なぜなら，y' が，傾きの関数に十分近いときには，$F(x, y, y')$ をテーラーの公式によって展開することができるからである。この汎関数の極値の調査を完結するためには，関数

$$E(x, y, p, y') = \frac{y}{y'^2} - \frac{y}{p^2} + \frac{2y}{p^3}(y'-p) = \frac{y(y'-p)^2(2y'+p)}{y'^2 p^3}$$

を考察することが必要である。因子 $(2y'+p)$ は任意の y' に対して，その符号を一定に保たないから 107 頁の注意から，L_2 に沿って，強い極小は存在しないことが導かれる。

上にのべた理論は，なんら本質的な変更をすることなしに，つぎの形の汎関数にまで拡張することができる：

$$v(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\,dx,$$

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

関数 E は

$$\begin{aligned} E = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') - \\ - F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) - \\ - \sum_{i=1}^{n} (y_i' - p_i) F_{p_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \end{aligned}$$

の形をとる。ここで p_i はある制限条件の下での傾きの関数である。

ルジャンドルの条件 $F_{y'y'} \geqslant 0$ は，不等式の集まり

$$F_{y'_1y'_1} \geqslant 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y'_1y'_1} & F_{y'_1y'_2} \\ F_{y'_2y'_1} & F_{y'_2y'_2} \end{vmatrix} \geqslant 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} F_{y'_1y'_1} & F_{y'_1y'_2} & \cdots & F_{y'_1y'_n} \\ F_{y'_2y'_1} & F_{y'_2y'_2} & \cdots & F_{y'_2y'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{y'_ny'_1} & F_{y'_ny'_2} & \cdots & F_{y'_ny'_n} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

でおきかえられなければならない。

もっとも簡単な問題におけるのと同じように，もっと複雑な問題においても，弱い極値に対する十分条件は，**二次の変分**の符号を調べることに基づく他の方法によって得ることができる。

テーラーの公式によって，もっとも簡単な問題に含まれている汎関数の増分を，つぎのように変形しよう：

$$\begin{aligned} \varDelta v &= \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y'))\,dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (F_{yy}\,\delta y^2 + 2F_{yy'}\,\delta y\,\delta y' + F_{y'y'}\,\delta y'^2)\,dx + R \end{aligned}$$

ここに $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{\delta y}$ および $\boldsymbol{\delta y'}$ に関して，二次より高い次数の無限小である。弱い極小を調べるときには，$\boldsymbol{\delta y}$ と $\boldsymbol{\delta y'}$ は十分に小さく，それゆえ，増分 $\boldsymbol{\Delta v}$ の符号は，上の方程式の右辺で $\boldsymbol{\delta y}$ と $\boldsymbol{\delta y'}$ の最低次を含む項の符号によって決定される。極値曲線に沿うては一次の変分は $\mathbf{0}$ になる。すなわち

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,dx = 0$$

であり，したがって，増分 $\boldsymbol{\Delta v}$ の符号は二次の変分

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy}\,\delta y^2 + 2F_{yy'}\,\delta y\,\delta y' + F_{y'y'}\,\delta y'^2)\,dx$$

の符号と一致する。そしてその結果，ヤコビの条件とルジャンドルの条件をいっしょにすれば，二次の変分の符号が一定であることが保証される。したがってそれらの条件が，弱い極小を見出す問題において，増分 $\boldsymbol{\Delta v}$ の符号が一定であることを保証することになる。

事実その通りであることを見るために，積分

$$(*)\qquad \int_{x_0}^{x_1} (\omega'(x)\,\delta y^2 + 2\omega(x)\,\delta y\,\delta y')\,dx$$

を考えよう。ここに $\boldsymbol{\omega(x)}$ は任意の微分可能な関数である。また，$\delta y|_{x_0} = \delta y|_{x_1} = 0$ であるから，その積分はつぎのように $\mathbf{0}$ となる：

$$\int_{x_0}^{x_1} (\omega'(x)\,\delta y^2 + 2\omega(x)\,\delta y\,\delta y')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(\omega\,\delta y^2)\,dx = [\omega(x)\,\delta y^2]_{x_0}^{x_1} = 0$$

積分 (*) を二次の変分につけ加えれば

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} ((F_{yy} + \omega')\,\delta y^2 + 2(F_{yy'} + \omega)\,\delta y\,\delta y' + F_{y'y'}\,\delta y'^2)\,dx$$

が得られる。

われわれは関数 $\boldsymbol{\omega(x)}$ を被積分関数が完全平方になるように選ぼう。この目的のためには，関数 $\boldsymbol{\omega(x)}$ は，方程式

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$$

を満足しなければならない。

最も簡単な汎関数　$v(y(x))=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx,$

弱　い　極　小	強　い　極　小	弱　い　極　小
1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$
2. ヤコビの条件	2. ヤコビの条件	2. ヤコビの条件
3. 調べている極値曲線に沿って $F_{y'y'}>0$ ここでは $F(x,y,y')$ は $p(x,y)$ に十分近い，すべての y' に対して，y' に関する三階導関数をもつことが仮定されている。	3. 調べている極値曲線に近い点 (x,y) と y' の任意の値に対して $F_{y'y'}(x,y,y')\geqslant 0$ ここでは $F(x,y,y')$ は任意の y' に対して，y' に関する三階導関数をもつことが仮定されている。	3. 調べている極値曲線に十分近い，すべての点 (x,y) と $p(x,y)$ に十分近いすべての y' に対して $E(x,y,p,y')\geqslant 0$

(1) 極大に対する十分条件を得るためには，不等式の符号を変えるだけでよい。

もし ω をそのように選ぶならば，二次の変分はつぎの形をとる：

$$\delta^2 v=\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\left(\delta y'+\frac{F_{yy'}+\omega}{F_{y'y'}}\delta y\right)^2dx$$

したがって，二次の変分の符号は $F_{y'y'}$ の符号と同じである。

しかしながら，そのような変換は，微分方程式

$$F_{y'y'}(\omega'+F_{yy})-(F_{yy'}+\omega)^2=0$$

が，区間 (x_0, x_1) において微分可能な解をもつときに限って許される。

u を新しい未知関数として

$$\omega=-F_{yy'}-F_{y'y'}\frac{u'}{u}$$

を代入して，新しい変数の組に変換すれば

$y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ の極小に対する十分条件の表[1]

強い極小	弱い極小	強い極小
1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. ヤコビの条件 3. 調べている極値曲線に十分近い，すべての点 (x,y) と任意の y' に対して $E(x,y,p,y')\geqslant 0$	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. 調べている極値曲線を含む極値曲線の場が存在する。 3. 調べている極値曲線に十分近い，すべての点 (x,y) と $p(x,y)$ に十分近い，すべての y' に対して $E(x,y,p,y')\geqslant 0$	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. 調べている極値曲線を含む極値曲線の場が存在する。 3. 調べている極値曲線に十分近い，すべての点 (x,y) と任意の y' に対して $E(x,y,p,y')\geqslant 0$

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}u')=0$$

が得られ，これはちょうどヤコビの方程式である（101頁を参照）。

もし区間 $x_0<x\leqslant x_1$ で 0 にならないこの方程式の一つの解が存在すれば，すなわちヤコビの条件が成立すれば，x の同じ値に対して，方程式

$$F_{y'y'}(F_{yy}+\omega')-(F_{yy'}+\omega)^2=0$$

の連続で微分可能な解 $\omega(x)=-F_{yy'}-F_{y'y'}u'/u$ が存在する。

それゆえ，ルジャンドルの条件とヤコビの条件が，二次の変分の符号が一定であることを保証することになる。

問　　題

つぎの汎関数の極値を調べよ。

1. $v(y(x))=\int_0^2(xy'+y'^2)\,dx$　　$y(0)=1$, $y(2)=0$

2. $v(y(x)) = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx \qquad a > 0, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0$

3. $v(y(x)) = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y')\,dx \qquad y(-1) = 1, \quad y(2) = 4$

4. $v(y(x)) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')\,dx \qquad y(1) = 3, \quad y(2) = 5$

5. $v(y(x)) = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y')\,dx \qquad y(-1) = y(2) = 1$

6. $v(y(x)) = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y)\,dx \qquad y(0) = -1, \quad y(\pi/4) = 0$

7. $v(y(x)) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2)\,dx \qquad y(1) = 1, \quad y(2) = 8$

8. $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1 + y^2}{y'^2}\,dx \qquad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$

9. $v(y(x)) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x})\,dx \qquad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y(1) = \frac{1}{3}e^2$

10. $v(y(x)) = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x)\,dx \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 1$

11. $v(y(x)) = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'} \qquad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1, \quad x_1 > 0, \quad y_1 > 0$

12. $v(y(x)) = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'^2} \qquad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1, \quad x_1 > 0, \quad y_1 > 0$

13. $v(y(x)) = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\,dx \qquad y(1) = 1, \quad y(2) = 4$

14. $v(y(x)) = \int_1^3 (12xy + y'^2)\,dx \qquad y(1) = 0, \quad y(3) = 26$

IV　章

拘束条件つきの極値を求める変分の問題

1. $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ の形の拘束

われわれはここで，汎関数 v の変関数である関数 $y(x)$ に，ある付加的な拘束条件が課せられているときの v の極値を見出す問題を考える。そのような極値は**拘束条件つきの極値**（*constrained extrema*）とよばれる。そのような問題の一つは，たとえば汎関数

$$v(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

の極値を，付加条件

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ m < n$$

の下で調べるという問題である。

通常の関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の極値を，拘束条件

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ m < n$$

の下で見出すという類似した問題の解法を思い出してみよう。最初の方法は，先ず独立であると考える連立方程式

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

を n 個の変数のうちの m 個，たとえば始めの m 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ について解き

$$x_1 = x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$
$$x_2 = x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m = x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$

そのようにして得られた $x_1, x_2, \ldots, x_m$ に対する表式を，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に代入することによって構成される。そのようにして，この関数 f は $n-m$ 個の変数，$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ の関数 $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$ になる。このとき $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ は独立である。それゆえ，初めの問題は，関数 Φ の普通の（つまり拘束条件なしの）極値を見出す問題に還元される。同じような方法で，上に定式化した変分の問題も解くことができる。すなわち連立方程式 $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ を $y_1, y_2, \ldots, y_m$ あるいは y_i の中のどれか他の m 個の関数の組に関して解き，その表式を汎関数 $v(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に代入すれば，汎関数 $W(y_{m+1}, y_{m+2}, \cdots, y_n)$ が得られる。これは $n-m$ 個の独立な変数だけに依存している。したがってこの汎関数は，I 章 3 節でのべた方法によって調べることができる。しかしながら，通常は，関数に対しても，また汎関数に対しても，**ラグランジュの乗数法**（***Lagrange method of multipliers***)* とよばれる他の方法を用いる方が便利である。この方法は，n 個の変数をなんら差別しないで取扱うものである。よく知られているように，$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を，拘束条件 $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ の下で極値を調べようとしている関数であるとすれば，ラグランジュの乗数法は λ_i をある定数の乗数として補助的な関数

$$z^* = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$$

を考え，関数 z^* の普通の極値を見出すことによって構成される。それゆえ，われわれは，全部で $n+m$ 個の未知量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ および $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ を決定するためには，拘束条件 $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ と，連立方程式

(*) ラグランジュの未定乗数法（Lagrange method of undetermined multipliers）ともいう。

$\partial z^*/\partial x_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$ をいっしょにして解かなければならない。汎関数の拘束条件つきの極値を求める問題も，同じようにして解くことができる。

もし

$$v = \int_{x0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

および

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

であれば，まず汎関数

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i\right) dx$$

あるいは

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^*\,dx$$

とおいて

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$$

をつくり，この v^* の通常の極値を調べなければならない。すなわち，付加的な拘束条件の方程式 $\varphi_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$ とともに，オイラーの方程式系

$$\text{(I)} \qquad F^*_{y_j} - \frac{d}{dx}F^*_{y_j'} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

を解かなければならない。

一般に，これら $m+n$ 個の方程式は $m+n$ 個の未知関数 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ および $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ を決定するのに十分であり，また拘束条件と矛盾しない境界条件 $y_j(x_0) = y_{j0},\ y_j(x_1) = y_{j1},\ j = 1, 2, \ldots, n$ はオイラーの方程

式系の一般解のなかの $2n$ 個の任意定数を決定するのに用いることができる。

そのようにして得られた，v^* を極小あるいは極大にするような曲線が，初めの変分の問題の解であることは明らかである。なぜなら，関数

$$\lambda_i(x),\ i=1,2,\ldots,m,\quad \text{および}\quad y_j,\ j=1,2,\ldots,n$$

が方程式系 (I) を満足するならば，すべての, $i=1,2,\ldots,m$ に対して

$$\varphi_i=0$$

であって，それゆえ $v^*=v$ になるからである。さて，もし方程式系 (I) から決定される曲線 $y_j=y_j(x)$ において v^* の通常の極値が存在すれば，その極値は拘束条件の方程式を満足するか，しないかにはかかわりなく，すべての隣接曲線族の中での極値であり，したがって，それは拘束条件の方程式を満足するもっと狭い隣接曲線の中における極値でもある。

しかしながら，このことから，初めの拘束条件つきの極値問題の解が，すべて汎関数 v^* に通常の極値をとらせるということは導かれない。したがって，このような方法で，初めの問題のすべての解が得られるかどうかは，明らかではない。われわれはもっと弱い一つの結果だけを証明しよう。

定理 拘束条件

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0,\qquad i=1,2,\ldots,m,\ m<n$$

の下で，汎関数

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

に極値をとらせるような関数の列 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ は，適当に選ばれた乗（関）数 $\lambda_i(x), i=1,2,\ldots,m$ に対して，汎関数

$$v^*=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\right)dx=\int_{x_0}^{x_1}F^*\,dx$$

に対するオイラーの方程式を満足する。関数 $\lambda_i(x)$ および $y_i(x)$ は，オイラーの方程式

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0, \quad j=1,2,\ldots,n$$

と拘束条件の方程式

$$\varphi_i=0, \quad i=1,2,\ldots,m$$

から決定することができる。方程式 $\varphi_i=0$ はもし $y_1, y_2, \ldots, y_n$ のみならず $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ をも汎関数 v^* の変関数と考えるならば，汎関数 v^* に対するオイラーの方程式と見なすこともできる。ただし方程式

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0, \quad i=1,2,\ldots,m$$

は独立であると仮定する。すなわち，次数 m の 0 でないヤコビアン（ヤコビの行列式），たとえば

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\neq 0$$

が存在するものと仮定する。

〔**証明**〕 極値に対する基本的な条件 $\delta v=0$ は

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}(F_{y_j}\delta y_j+F_{y'_j}\delta y'_j)dx=0$$

の形をとる。あるいはおのおのの括弧の中の第二項を部分積分し

$$(\delta y_j)'=\delta y'_j \quad \text{および} \quad (\delta y_j)_{x=x_0}=0, \quad (\delta y_j)_{x=x_1}=0$$

であることを思いおこせば

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}-\frac{d}{dx}F_{y'_j}\right)\delta y_j dx=0$$

が得られる。$y_1, y_2, \ldots, y_n$ は m 個の独立な拘束条件

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0, \quad i=1,2,\ldots,m$$

に支配されるから，変分 δy_j は任意ではなく，したがって基本補題は適用することができない。変分 δy_j は，拘束条件の式 $\varphi_i = 0$ を変分することによって得られるつぎの関係式を，満足しなければならない：

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \text{ (1)}$$

またその結果，変分 δy_j のうち $n-m$ 個，たとえば $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \ldots, \delta y_n$ だけが独立であって，残りのものは上に得た関係式から，決定されなければならないと考えられる。

i 番目の方程式に $\lambda_i(x)dx$ をかけて x_0 から x_1 まで積分すれば

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

が得られる。これら m 個の方程式は，すべての許された変分 δy_j によって満足されるものであるが，これらの方程式と，さらに方程式

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0$$

を全部加えあわせれば

---

(1) もっと正確にいえば，方程式 $\varphi_i(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \ldots, y_n + \delta y_n) = 0$ と $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ の左辺の項の差

$$\varphi_i(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n) - \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$$

にテーラーの公式を適用して

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + R_i = 0$$

と書くべきである。ここで R_i は δy_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ に関して一次よりも高次の項である。しかしながら，項 R_i は結果的には何の役割も演じないことは容易に確かめられる。なぜなら，汎関数の変分を計算するときには，われわれは δy_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ に関して，一次の項のみに関心をもつからである。以上のようにすることを，式 $\varphi_i = 0$ を変分するという。

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right) \delta y_j \, dx = 0$$

が得られる。

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i$$

とおくと

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx$$

となる。ここでも，ふたたび，δy_j は独立でないから，基本補題を適用することはできない。われわれは m 個の乗数* $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ を それらが m 個の方程式

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

を満足するように選ぶ。この λ_i に関する一次方程式系は 0 にならないヤコビアンをもっている。すなわち

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0$$

したがって，この系には一組の解

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$$

---

* 乗数といっても，この場合は x の関数である。以下も同様である。

が存在する。$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ をこのように選ぶと，極値に対する基本的な必要条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0$$

は

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0$$

の形になる。そして汎関数 v に極値をとらせる関数 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対しては，たとえ $\delta y_j,\ j = m+1, m+2, \ldots, n$ が任意に変わっても，この関数方程式が恒等的に成り立つのであるから，基本補題が適用される。δy_j のうちの一つを除いて，他のすべてを 0 に等しくおいて，基本補題を適用し，この手順を $n-m$ 回繰りかえせば

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = m+1, m+2, \ldots, n$$

が得られる。

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

であったことを思い出せば，結局つぎの結論に到達したことになる。すなわち，汎関数 v を拘束条件の下で極値にするような関数は，乗数 $\lambda_i(x)$ とともにつぎの方程式系を満足する：

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

例題　1.　一つの曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 上にある二点 $A(x_0, y_0, z_0)$ と $B(x_1, y_1, z_1)$ の間の最短距離を見出せ（3 頁の測地線の問題を参照）。

よく知られているように，一つの曲面上の二点間の距離は公式

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

によって与えられる。いまの場合には，拘束条件 $\varphi(x, y, z)=0$ のもとで l の極小を求めなければならない。すぐ上で示したように，補助的な汎関数

$$l^*=\int_{x_0}^{x_1}\left(\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)\varphi(x, y, z)\right)dx$$

を考えて，そのオイラーの方程式を書きくだそう。すなわち

$$\lambda(x)\varphi_y-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0$$

$$\lambda(x)\varphi_z-\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,\qquad \varphi(x, y, z)=0$$

この方程式系は乗数 $\lambda(x)$ とともに未知関数

$$y=y(x),\qquad z=z(x)$$

の両方を決定し，これが汎関数 l の拘束条件つきの極値を与えるであろう。

例題 2. オストログラツキー・ハミルトンの原理（51，52 頁を参照）を用いて，質量 m_i，$i=1, 2, \ldots, n$ をもつ質点系の運動方程式を見出せ。ただし，座標を (x_i, y_i, z_i) とし，質点にはたらく力は力の関数（ポテンシャル関数）U をもち，また座標 (x_i, y_i, z_i) と時間 t は拘束条件

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n)=0$$

$$j=1, 2, \ldots, m.$$

にしたがうものとする。

オストログラツキー・ハミルトンの積分

$$v=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$$

は，この場合にはつぎのような形をとる：

$$v=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-U\right)dt$$

そして補助的な汎関数は

$$v^* = \int_{t_0}^{t_1} \left(\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \varphi_j \right) dt$$

である。運動方程式は汎関数 v^* のオイラーの方程式であって，それらはつぎのような形になる：

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

$$m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i},$$

$$m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

2. $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$ の形の拘束

前節では，汎関数

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') dx$$

$$y_j(x_0) = y_{j0}, \qquad y_j(x_1) = y_{j1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

の，有限な形の拘束条件

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

のもとにおける極値を見出す問題を考えた。つぎにわれわれは拘束条件が微分方程式

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

であると仮定しよう。この場合に，汎関数 v の拘束条件つきの極値が，汎関数 v^* すなわち

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx$$

ただし

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$$

の通常の極値を与えるような曲線においてのみ，生じうるという未定乗数の原理を証明することができる。

しかしながら，その証明は，有限な形の拘束条件に対するものよりも，はるかに複雑である。

もし，汎関数 v が拘束条件つきで極値をとるような曲線は，適当に選ばれた $\lambda_i(x)$ に対して v^* の極値曲線である，というもっと弱い主張を証明しようとするのであれば，われわれは前節における類似の主張の証明を，わずかに変えるだけでたどることができる。

実際には，つぎのように進めばよい。次数 m の 0 でない関数行列式，たとえば

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_m')} \neq 0$$

が存在すると仮定しよう。これは，拘束条件が独立であることを意味する。

方程式 $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$ を $y_1', y_2', \ldots, y_m'$ について解く。これは

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_m')} \neq 0$$

であるから，もちろん可能である。そうすると

$$y_i' = \psi_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_{m+1}', \ldots, y_n'), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

が得られる。関数 $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ が独立であると考えるならば，この微分方程式系は $y_1, y_2, \ldots, y_m$ を決定する。関数 $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ は定まった境界条件をもつ任意の微分可能な関数であり，それゆえそれらの変分は，この意味で，任意の変分である。

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ を，拘束条件 $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ を満足する，許された関数の任意の系としよう。

拘束条件の方程式の変分をとれば

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\,\delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j}\,\delta y'_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \ (^1)$$

となる。これらの方程式の おのおのに，いまのところ 任意である乗数 $\lambda_i(x)$ を つぎつぎに，かけて x_0 から x_1 まで積分する。そうすると

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\,\delta y_j\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j}\,\delta y'_j\,dx = 0$$

が得られる。上式の第二の積分の各項を部分積分し，$\delta y'_j = (\delta y_j)'$ および $(\delta y_j)_{x=x_0} = (\delta y_j)_{x=x_1} = 0$ であることに注意して

$$\text{(I)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j} \right) \right) \delta y_j\,dx = 0$$

を得る。極値に対する基本的な必要条件，$\delta v = 0$ から

$$\text{(II)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j\,dx = 0$$

が導かれる。なぜなら

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} (F_{y_j}\,\delta y_j + F_{y'_j}\,\delta y'_j)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j\,dx$$

だからである。

(I) のすべての方程式と，方程式 (II) を加えて，$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i$ とおけば

$$\text{(III)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j\,dx = 0$$

---

(1) 124 頁においてと同様に，これらの方程式の左辺に $\delta y_j, \delta y'_j$，$j = 1, 2, \ldots, n$ に関して一次よりも高い次数の項から成るある表式をつけ加えておくべきである。しかしながらいまの場合には，これら非線形の項の影響を評価することは前の場合よりもはるかに困難である。

が得られる。変分 δy_j, $j=1, 2, \ldots, n$ は独立ではないから，基本補題を適用することはできない。そこで，m 個の乗数，$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ を

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0, \quad j=1, 2, \ldots, m$$

が成り立つように選ぼう。もしこれらすべての方程式を完全な形に書くならば，それらが

$$\lambda_i(x) \quad \text{および} \quad \frac{d\lambda_i}{dx}, \quad i=1, 2, \ldots, m$$

に関する線形微分方程式系であることは明らかである。これらの方程式は，すでになした仮定のもとでは，m 個の任意定数を含む一組の解 $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ をもっている。これらの $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ を方程式 (III) に代入すれば

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=m+1}^{n}\left(F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}\right)\delta y_j\,dx=0$$

が得られる。ここに変分 δy_j, $j=m+1, m+2, \ldots, n$ は任意である。したがって δy_j のうち任意の値をとりうるもの一つを除いて，他のすべての変分を $\delta y_j=0$ とおき，基本補題を適用すれば

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0, \quad j=m+1, m+2, \ldots, n$$

を得る。結局，汎関数 v に，拘束条件のもとで極値をとらせる関数 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ は，乗数 $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ とともに，つぎの $n+m$ 個の方程式系を満足しなければならない：

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0, \quad j=1, 2, \ldots, n$$

および

$$\varphi_i=0, \quad i=1, 2, \ldots, m$$

すなわち，$n+m$ 個の関数 $y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ に依存すると考えた補助的な汎関数 v^* のオイラーの方程式を満足しなければならない。

3. 等周問題

最も狭い意味では，**等周問題**（*isoperimetric problem*）というのは与えら

れた長さの周囲をもち，最大の面積をもつ幾何学的図形を見出す問題である。

古代ギリシャ で研究されたこの 極値問題は， すでに 4 頁でのべたように，もちろん一つの変分問題である。(1)

曲線をパラメーター表示の形，$x = x(t)$, $y = y(t)$ に書いておけば，この問題はつぎのように定式化される。汎関数

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}}\, dt$$

が一定の値 l をもっという付加条件のもとで，汎関数

$$S = \int_{t_0}^{t_1} x y^{\cdot}\, dt \qquad \left(\text{あるいは}\quad S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x y^{\cdot} - y x^{\cdot})\, dt\right)$$

の最大値を求めよ。したがってわれわれは， 特異な拘束条件， すなわち積分 $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}}\, dt$ が一定という条件のもとでの， 拘束条件つきの極値に対する変分の問題をもつわけである。

いまではつぎのような，もっとずっと広い範囲の問題が**等周問題**とよばれている。すなわち，汎関数

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$$

の極値を，ある他の汎関数，たとえば

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx = l_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

を一定に保つという条件のもとで，見出すようなすべての問題である。ここで l_i は定数であり，m は n より大きくても小さくても，あるいは n に等しくてもよい。さらにもっと複雑な汎関数に対する類似の問題も，等周問題とよばれ

(1) この問題の解は古代ギリシャ人に知られてはいたが，この問題の変分としての性格は， 17 世紀の終りになって，始めて明らかにされた。

る。この種の拘束条件は**等周条件**（*isoperimetric condition*）とよばれている。

新しい未知関数を導入することによって，等周問題を，前節で考えた拘束条件つきの極値問題に帰着させることができる。

関数 $z_i(x)$ を

$$z_i(x) = \int_{x_0}^{x} F_i dx, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

で定義しよう。そうすると $z_i(x_0) = 0$ でありまた，$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ であるから，$z_i(x_1) = l_i$ である。

z_i を x に関して微分すると

$$z_i'(x) = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

が得られる。

このようにして，積分形の等周条件は微分形の拘束条件

$$z_i' = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

におきかえられ，かくして問題は前節で考察した問題に還元される。すなわち汎関数

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F dx$$

の拘束条件 $F_i - z_i' = 0$，$i = 1, 2, \ldots, m$ つきの極値を調べるかわりに，ラグランジュの乗数法を適用して，汎関数

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z_i')\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx$$

の通常の極値を調べることもできる。ここに

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z_i')$$

である。オイラーの方程式は

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$F^*_{z_i} - \frac{d}{dx} F^*_{z'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

あるいは，

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{i y_j} - \frac{d}{dx}\left(F_{y'_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{i y'_j}\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

である。

後の m 個の方程式から，すべての λ_i は定数であることが導かれ，初めの n 個の方程式は汎関数

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i\right) dx$$

に対するオイラーの方程式である。

それゆえ，われわれは，つぎの規則を得たことになる。すなわち，汎関数 $v = \int_{x_0}^{x_1} F\,dx$ の拘束条件 $\int_{x_0}^{x_1} F_i\,dx = l_i$ のもとでの極値を見出すという等周問題に対する，基本的な必要条件を得るためには，新しい汎関数

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i\right) dx$$

をつくって，そのオイラーの方程式を書きくださなければならない。ここに λ_i は定数である。

オイラーの方程式系の一般解に含まれる任意定数 $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ および定数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ は境界条件

$$y_j(x_0) = y_{j0}, \quad y_j(x_1) = y_{j1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

および等周条件

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

から決定することができる。

汎関数 v^{**} に対するオイラーの方程式系は，v^{**} に，ある定数の乗数 μ_0 をかけても変わらない。そこで

$$\mu_0 v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^{m} \mu_i F_i dx$$

である。ここに $F_0 = F$ であり，$\mu_j = \lambda_j \mu_0$，$j = 1, 2, \ldots, m$ である。さて，すべての関数 F_i は対称的な形で含まれており，したがって，等周条件

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i, \quad i = 0, 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, m$$

のもとで，汎関数

$$\int_{x_0}^{x_1} F_s dx$$

の極値を見出すという変分問題に対する極値曲線と，初めの変分問題に対する極値曲線とは同じものである。

この性質は**相反性の原理**（*principle of reciprocity*）とよばれる。たとえば，与えられた長さの閉曲線によって囲まれる面積を，最大にする問題と，与えられた面積を囲む，最小の長さをもつ曲線を求める問題とは相反的であり，それらの極値曲線は共通である。

例題 1. 与えられた長さ l をもち，図 47 にて与えられている曲線で，囲まれた台形 $CABD$ の面積を最大にするような曲線を見出せ。

汎関数

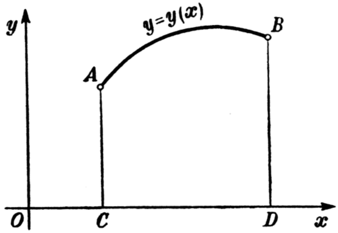


図　47.

$$S=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \qquad y(x_0)=y_0, \qquad y(x_1)=y_1$$

の等周条件

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

のもとでの極値を調べよう。

まず，補助的な汎関数

$$S^{**}=\int_{x_0}^{x_1}\left(y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx$$

をつくる。被積分関数は x を含まないから，S^{**} に対するオイラーの方程式は積分曲線 $F-y'F_{y'}=C_1$ をもつ。この場合にはこれは

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$$

となり，したがって

$$y-C_1=\frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$$

が得られる。

パラメーター t を導入し，$y'=\tan t$ とおけば

$$y-C_1=-\lambda\cos t, \qquad \frac{dy}{dx}=\tan t$$

となって

$$dx=\frac{dy}{\tan t}=\frac{\lambda\sin t\,dt}{\tan t}=\lambda\cos t\,dt,\qquad x=\lambda\sin t+C_2$$

が得られる。それゆえ，極値曲線のパラメーター表示は

$$x-C_2=\lambda\sin t,$$
$$y-C_1=-\lambda\cos t$$

である。

t を消去すれば $(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2$ が得られるが，これは円群である。定数 C_1, C_2 および λ は条件

$$y(x_0)=y_0,\qquad y(x_1)=y_1,\qquad \text{および}\qquad \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

から決定することができる。

例題 2. 与えられた長さ l をもち，与えられた曲線 $y=f(x)$ とともに最大面積を囲む曲線 AB を見出せ（図 48)。

われわれは，汎関数

$$S=\int_{x_0}^{x_1}(y-f(x))\,dx,\qquad y(x_0)=y_0,\qquad y(x_1)=y_1$$

の，条件

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

のもとにおける極値を決定しなければならない。補助的な汎関数

$$S^{**}=\int_{x_0}^{x_1}\left(y-f(x)+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx$$

をつくる。この汎関数に対するオイラーの方程式は，前の例題と同じであり，したがって極大は，ある円の弧に沿うてのみ生ずるであろう。

例題 3. 二つの固定点 A, B の間に張られている，長さ l の完全可撓性の伸びないロープの形を見出せ（図 49)。

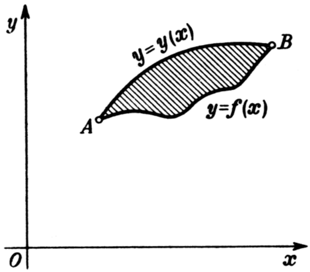


図　48.

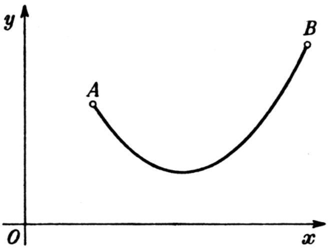


図　49.

静止の位置では，重心は可能なもっとも低い位置をとるから，問題は，水平方向に向いている x-軸に関する静的なモーメント P の極小値を見出す問題に引き直される。そこで汎関数

$$P = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

の，条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$$

のもとにおける極値を調べよう。補助的な汎関数は

$$P^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

である。この汎関数のオイラーの方程式は，つぎの第一積分をもつ：

$$F - y'F_{y'} = C$$

すなわち，この場合には

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

をもち，それゆえ $y+\lambda = C_1\sqrt{1+y'^2}$ である。$y' = \sinh t$ とおいて，パラメーター t を導入すれば，$\sqrt{1+y'^2} = \cosh t$, $y+\lambda = C_1\cosh t$, $dy/dx = \sinh t$ のようにな

る。したがって，$dx = dy/\sinh t = C_1 dt$，$x = C_1 t + C_2$ となる。あるいは t を消去すれば，$y + \lambda = C_1 \cosh\big((x - C_2)/C_1\big)$ が得られるが，これは懸垂線（catenary）である。

この節で与えた等周問題を解くための規則は，もっと複雑な型の汎関数にまで拡張することができる。

問　　題

1. 条件 $\int_0^1 y^2 dx = 2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ のもとで，$v(y(x)) = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx$ の極値を求めるという等周問題に対する極値曲線を見出せ。

2. 円筒 $r = R$ の測地線を見出せ。

ヒント：この問題は円筒座標 r, φ, z で取り扱うほうがよい。

3. 条件，$\int_{x_0}^{x_1} y\, dx = a$，$a$ は定数として，つぎの等周問題

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 dx$$

の極値曲線を見出せ。

4. 汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^{x_1} \left(p(x) y'^2 + q(x) y^2\right) dx$$

の，条件

$$\int_0^{x_1} r(x) y^2 dx = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = 0$$

のもとでの極値を求める等周問題に対して，極値曲線の微分方程式を書きくだせ。

5. 汎関数

$$v(y(x), z(x)) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx$$

の，条件

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2, \quad y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ y(1) = 1,\ z(1) = 1$$

のもとで極値を求める等周問題の極値曲線を見出せ。

V　章

変分の問題を解くための直接的な方法

1.　直接的な方法

変分の問題に出てくる微分方程式が，容易に積分できるのは例外的な場合だけである。したがって，このような問題に対して解を求める他の方法を見つけ出すことは大切なことである。いわゆる直接的な方法の背後にある基本的な考えは，変分の問題を，有限個の変数をもつ関数の極値を求めるある種の問題に対する，極限の問題であると考えることである。この有限個の変数をもつ関数の極値問題は，普通の方法で解かれ，そしてそれから，ある種の極限過程を行なうことによって，初めの変分の問題の解が得られる。

汎関数 $v\big(y(x)\big)$ は，無限個の変数の組の一つの関数であると考えることができる。このことは，もし許された関数を，べき級数

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

あるいはフーリエ級数

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

あるいは，一般に $\varphi_n(x)$ を与えられた関数として

(1)
$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

の形の級数で表わすことができると仮定すれば，かなり明らかである。

(1)の形に表わすことのできる関数 $y(x)$ を決定するためには，すべての係数

a_n を決定すれば十分であって，それゆえ，汎関数 $v(y(x))$ は無限数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ によって完全に決定される。すなわち汎関数はつぎのように無限個の変数の組の関数である：

$$v(y(x)) = \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

その結果，変分の問題と有限個の変数をもつ関数の極値問題とのちがいは，変数の個数ということにある。つまり極値に対する変分の問題では，この個数が無限大になるのである。それゆえ，直接的な方法の基本的な考え，すなわち変分の問題を，有限個の変数をもつ通常の関数の極値問題の，ある極限の場合と考えることは非常に興味がある。

L. オイラーは，彼の変分法の研究の初期において，今日では差分法による直接的な方法とよばれている一つの方法を適用した。この方法はその後は，あまり適用されてはいなかった。その方法がソビエトの数学者（**L. A.** ルステルニク（**Lusternik**），**I. G.** ペトロフスキー（**Petrovski**），その他の人々）によって成功裡に復活されるようになったのは，最近60年間位の間のことにすぎない。

他の直接的な方法はリッツ（**Ritz**）の方法であって，これはソビエトの数学者（**N. M.** クリーロフ（**Krylov**），**N. N.** ボゴリューボフ（**Bogolubov**）その他の人々）によって非常に発展させられた。今日では，この方法はいろいろな変分の問題，特に弾性論に出てくる変分の問題を解くため，広く用いられている。

L. V. カントロヴィッチ（**Kantorovič**）による第三の方法は，数個の独立変数をもつ関数に依存する汎関数に適用され，リッツの方法が用いられるような領域で，ますます広く用いられるようになっている。

結局，われわれはこれら三つの基本的な方法だけを考えることにしよう。そして証明なしに，多くの命題を与えるであろう。今日用いられている現代的な直接的方法について，もっと詳しいことを知りたい読者は，**L. V.** カントロヴィッチと **V. I.** クリーロフの書物，“高等解析における近似的な方法”（***Approximate methods of higher analysis***）（ロシア語），モスクワ，**1952**，および **S. G.** ミクリン（**Mikhlin**）の書物，“数理物理学における直接的な方法”（***Direct methods of mathematical physics***）（ロシア語）モスクワ，**1950**，を参照されたい。

2. 差分法によるオイラーの方法

差分法による解法（*method of finite differences*）の主な考え方は，つぎの通りである。すなわち，汎関数 $v\big(y(x)\big)$，たとえば

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \qquad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b$$

の値を，与えられた変分問題に対する，任意の許された曲線に沿うて，考えるのではなくして，その頂点の固定された横座標が，$x_0+\Delta x, x_0+2\Delta x, \ldots, x_0+(n-1)\Delta x$，ここに $\Delta x = (x_1-x_0)/n$，で与えられる指定された個数の線分から成る折れ線に沿ってのみ考えるのである（図 50）。そのような折れ線に沿って，汎関数 $v\big(y(x)\big)$ は頂点の縦座標 $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ の一つの関数 $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ になる。それは，折れ線がこれらの縦座標によって完全に決定されるからである。

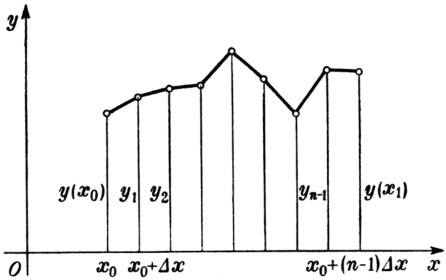


図 50.

われわれは縦座標 $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ を関数 $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ が極値をとるように選ぶ。すなわち，$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ を，方程式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}} = 0$$

によって決定し，それから $n \to \infty$ の極限に移行する。関数 F にある制限を課しておけば，このようにして初めの変分問題の解が得られるであろう。

しかしながら，このような折れ線に沿うて汎関数 $v(y(x))$ の値を近似的に計算する方が，もっと便利である。たとえば最も簡単な問題では，積分

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x} F(x, y, y')dx$$

を，有限和

$$\sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$$

でおきかえるのが便利である。

この方法を説明するために，汎関数

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

に対するオイラーの方程式を導き出してみよう。この場合には，折れ線に沿うて

$$v(y(x)) \approx \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$$

である。この和の中で，y_i を含む項は二つ，すなわち第 $i+1$ 項と第 i 項，

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x \quad \text{および} \quad F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$

だけであり，それゆえ，方程式 $\partial\varphi/\partial y_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n-1$ はつぎの形をとる：

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\Delta x +$$

$$+F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Delta x = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

すなわち

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) -$$

$$-\frac{F_{y'}(x_i, y_i, \Delta y_i/\Delta x) - F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \Delta y_{i-1}/\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

あるいは

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0$$

である。それゆえ，$n \to \infty$ とすれば，極値を与える関数 $y(x)$ が満足しなければならないオイラーの方程式

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

が得られる。他の変分の問題に対する極値の必要条件も同じような方法で得られる。

もしわれわれが，極限過程を完全に行なってしまいたくないなら，縦座標 $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ を方程式 $\partial\varphi/\partial y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ から決定することができ，そうすることによって，考えている変分問題の近似的な解である一つの折れ線が得られることになる。

3. リッツの方法

リッツの方法（*Ritz's method*）の考え方は，汎関数 $v(y(x))$ を任意の許さ

れた曲線に沿って考えるのではなく，ある関数列

$$W_1(x),\ W_2(x),\ \ldots,\ W_n(x),\ \ldots$$

の初めの n 個の関数の定数係数をもつ，すべての可能な一次結合

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$$

に沿ってだけ考えることである。関数

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$$

はある与えられた問題に対する許された関数でなければならない。このことは関数列 $W_i(x)$ の選び方に，一つの付加的な制限を与えることになる。そのような一次結合に沿うてのみ考えると，汎関数 $v\big(y(x)\big)$ は，係数 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ の関数 $\varphi(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ になる。つぎにこれらの係数 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ を，関数 $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が極値をとるように選ぶ。したがって $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ は方程式系

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

によって決定される。

$n \to \infty$ にすることによって，極限過程を完成させれば，極限関数

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i W_i(x)$$

が得られる。ただしこの級数は収束すると仮定してである。汎関数 $v\big(y(x)\big)$ と関数列 $W_1(x),\ W_2(x),\ \ldots,\ W_n(x),\ \ldots$ についてある仮定をおけば，この関数は考えている変分問題の一つの正確な解になるであろう。もし極限をとる過程を完全に遂行しようと思わないで，むしろ最初の n 項だけで満足するなら，変分問題の一つの近似的な解

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$$

を得るであろう。

このような方法で，ある汎関数の極小を決定すれば，この極小の正確な値は，大きい方から近似される。なぜなら，より広いすべての許された曲線にわたってとられた汎関数の極小値は，常に，これらのすべての曲線のうちの一部，すなわち $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$ の形の曲線の上だけでとられた同じ汎関数の極小値よりも，小さいかあるいは等しいからである。同じように，ある汎関数の極大値を決定するのに，この方法を用いると，下からの近似値が得られるであろう。

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$$

が許された関数であるためには，それらは境界条件とともに，もちろん連続性や，滑らかさ等に対する，いくつかの他の条件を満足しなければならない。もし境界条件が，線形かつ同次であれば，たとえば最も簡単な問題の場合のように $y(x_0) = y(x_1) = 0$ であるか，あるいは，β_{ij} を定数として

$$\beta_{1j} y(x_j) + \beta_{2j} y'(x_j) = 0, \quad j = 0, 1$$

であれば，基底関数系（**coordinate function**）$W_n(x)$ を，それらがすべて，これらの境界条件を満足するように選ぶのが最も便利である。このようにすれば，$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(x)$ も任意の a_i に対して，同じ境界条件を満足することは明らかである。たとえば，境界条件は $y(x_0) = y(x_1) = 0$ であると仮定しよう。そのときわれわれは，基底関数系として

$$W_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi_i(x)$$

を選ぶことができる。ここに $\varphi_i(x)$ は任意の連続関数である。あるいはまた

$$W_k(x) = \sin \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

あるいは，条件

$$W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$$

を満足する任意の関数を基底関数系として選ぶことができる。

もし境界条件が同次でないならば，たとえば，少なくとも y_1, y_0 のうちの一つは 0 でないとして，$y(x_0) = y_0$，$y(x_1) = y_1$ であれば，もっとも便利な方法は

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x) + W_0(x)$$

の形の変分問題の解を見出そうと試みることである。ただし，ここに $W_0(x)$ は与えられた条件 $W_0(x_0) = y_0$, $W_0(x_1) = y_1$ を満足する関数であり，残りのすべての関数 $W_i(x)$ は，対応する同次境界条件，すなわち，この場合には $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$ を満足する関数である。関数列 $W_i(x)$ をそのように選ぶと，$y_n(x)$ は任意の α_i に対して，与えられた非同次の境界条件を満足する。関数 $W_0(x)$ としては，たとえば一次関数

$$W_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

をとることができる。

方程式系 $\partial\varphi/\partial\alpha_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ を解くことは，一般にむずかしい問題である。この問題は，調べようとする汎関数 v が，未知関数とその導関数に関して二次の汎関数であるときには，著しく簡単化される。それは，この場合には $\partial\varphi/\partial\alpha_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$ は α_i に関して一次になるからである。

基底関数系（*coordinate function*）とよばれる関数 $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ を初めにどう選ぶかということは，後の計算の複雑さの度合に，大いに影響する。それゆえ，リッツの方法を適用して成功するかどうかは，基底関数系を適切に選ぶかどうかに大いに関係する。

上でのべたことは，すべてそのまま汎関数 $v\big(z(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$ に適用できるが，もちろんそのときには関数 W_i は，変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数でな

ければならない。同じことば，いくつかの関数に依存する汎関数に対しても成立する。

リッの方法は，しばしば数理物理学の問題の正確な解，あるいは近似的な解を見出すのに用いられる。たとえば，ポアソンの方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)$$

の解で，ある領域 D の境界上で z が与えられた値をとるようなものを見出したいと思うならば，われわれはこの問題を，与えられた方程式をオストログラツキーの方程式（43 頁を参照）としてもつような，ある汎関数の極値に対する変分の問題で，おきかえることができる。ポアソンの方程式の場合には，この汎関数は

$$\iint_D\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x,y)\right)dxdy$$

である。この汎関数に極値をとらせる関数 z はいままでのべた直接的な方法のどれかを用いて，調べることができる。

数理物理学の問題は，一般に未知関数とその導関数に関して二次の汎関数の極値問題に還元することができ，したがってそのような場合には，リッツの方法を適用することは簡単な問題である。

リッツの近似が，変分問題の求める解に収束するかどうかという問題は，近似の程度を評価する問題と同様に，非常に複雑である。それゆえ，われわれはただ二三の注意を与えるだけに留め，この問題について，もっと詳しく知りたい読者には 141 頁に引用したミクリン，カントロヴィッチ，クリロフの書物を参照することをすすめることにしよう。

議論をもっと限定するために，汎関数

$$v(y(x))=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx$$

に注目し，問題になる極値は極小値であると仮定しよう。基底関数列 $W_1(x)$, $W_2(x),\ldots,W_n(x),\ldots$ は，つぎの意味で完全であると仮定する。すなわち，

おのおのの許された関数は，一次の近さの意味で，基底関数の一次結合

$$\sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x)$$

によって任意に高い精度で近似できる。ここで n は十分大きいものとする。リッツの方法によって，関数列，$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$，ただし

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x)$$

を構成できるということは，明らかである。この関数列は，いわゆる，**極小列**（***minimizing sequence***）である。すなわち，汎関数の値

$$v(y_1), v(y_2), \ldots, v(y_n), \ldots$$

が，汎関数 $v\big(y(x)\big)$ の極小値あるいは，最大下界（下限）に近づくような関数列である。しかしながら，$\lim_{n\to\infty} v\big(y_n(x)\big) = \min v\big(y(x)\big)$ の関係式からは，$\lim_{n\to\infty} y_n(x)$ が v を極小にするということは導かれない。極小列は，許された関数族の中の極値を与える一つの関数には，収束しないかもしれないのである。

事実，汎関数 v の

$$v\big(y_n(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y_n(x), y_n'(x)\big)\,dx$$

および

$$v\big(y(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\,dx$$

の二つの値の差は，積分の全区間 (x_0, x_1) の上で $y_n(x)$ が一次の意味で $y(x)$ に近い場合のみならず，区間 (x_0, x_1) の十分小さい部分において $y_n(x)$, $y(x)$ および，それらの導関数はかなり異なっているが，区間の残りの部分では，それらがお互いに近い場合にも，その値の差は非常に小さくなることがあり得る

のである（図 51）。したがって極小列 $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ は，それら自身が許された関数である場合でさえも，許された関数族の中には極限をもたないかもしれない。

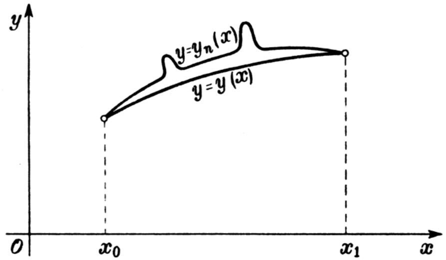


図 51.

リッツの方法でつくられた関数列 $y_n(x)$ が，ある変分問題の解に収束するための条件，および，もっとも頻繁に現われる特定の形の汎関数に対する収束の速さの評価についての議論は，N. M. クリーロフおよび N. N. ボゴリューボフの論文の中で，詳細に展開されている。たとえばその中では，応用問題でしばしば出会う

$$v = \int_0^1 \left(p(x)y'^2 + q(x)y^2 + f(x)y\right)dx, \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

$$p(x) > 0, \quad q(x) \geqslant 0$$

の形の汎関数が論じられている。この場合，基底関数は

$$W_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

であって，この汎関数の極小を与える関数 $y(x)$ に対するリッツの近似が，収束することが証明されているのみならず，誤差 $|y(x) - y_n(x)|$ の非常に精密な評価式も導き出されている。

ここではその評価式の一つを与えておこう。これは最も良い評価ではないが，区間 $(0, 1)$ における $|y(x) - y_n(x)|$ の最大値に対する，きわめて便利な評価の一つである。

$$\max|y-y_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\left(\max p(x)+\frac{\max q(x)}{(n+1)^2\pi^2)}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}}{\pi^2\sqrt{2}\left(\min p(x)\right)^{5/2}}\times$$
$$\times\left(\max|p'(x)|+\frac{1}{\pi}\max q(x)+\pi\min p(x)\right)\ ^{(1)}$$

この比較的簡単な場合においてさえも，誤差の評価は非常に複雑である。それゆえ，リッツの方法あるいは，他の直接的な方法によって得られた結果の正確さを決定するために，通常われわれは，適切な理論的基礎づけは与えられていないけれども，つぎのような実際的な方法を用いる。その方法はつぎの通りである。$y_n(x)$ と $y_{n+1}(x)$ を計算して，それらを区間 (x_0, x_1) のいくつかの点で比較す。もし与えられた目的に対して，要求される正確さの程度で，それらの値が一致するならば，その変分問題の解は，$y_n(x)$ に等しいと考える。いくつかの x の値に対して $y_n(x)$ と $y_{n+1}(x)$ が与えられた目的のためには，違いがあまりにも，大きすぎるときには，$y_{n+2}(x)$ を計算して，区間 (x_0, x_1) のいくつかの点で，$y_{n+1}(x)$ と $y_{n+2}(x)$ を比較する。この過程を，$y_{n+k}(x)$ と $y_{n+k+1}(x)$ が，与えられた目的に対しては，同じであるとみなすことができるようになるまで続ける。

例題 1．一定の厚さの固定されたくさび（図 52）の振動を研究する場合には，汎関数

$$v=\int_0^1 (ax^3y''^2-bxy^2)\,dx,\qquad y(1)=y'(1)=0$$

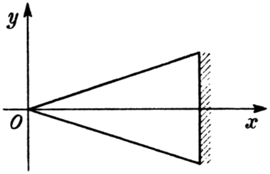


図　52.

(1) 先に引用したカントロヴィッチおよびクリーロフの文献を参照されたい。

の極値を調べなければならない。ここに a, b は正の定数である。

境界条件を満足する基底関数系として

$$(x-1)^2,\ (x-1)^2x,\ (x-1)^2x^2,\ \ldots,\ (x-1)^2x^{k-1},\ \ldots$$

をとることができる。したがって

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(x-1)^2x^{k-1}$$

とおく。初めの二項だけをとれば

$$y_2 = (x-1)^2(a_1+a_2x)$$

が得られ，それゆえ

$$v_2 = v(y_2) = \int_0^1 (ax^3(6a_2x+2a_1-4a_2)^2 - bx(x-1)^4(x-1)(a_1+a_2x)^2)\,d_x$$

$$= a\left((a_1-2a_2)^2 + \frac{24}{5}a_2(a_1-2a_2)+6a_2^2\right) - b\left(\frac{a_1^2}{30}+\frac{2a_1a_2}{105}+\frac{a_2^2}{280}\right)$$

となる。極値に対する必要条件 $\partial v_2/\partial a_1 = 0,\ \partial v_2/\partial a_2 = 0$ はつぎの形をとる：

$$\left(a-\frac{b}{30}\right)a_1 + \left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)a_2 = 0$$

$$\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)a_1 + \left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{280}\right)a_2 = 0$$

振動が全く起っていない平衡の位置に対応する自明な解，$a_1 = a_2 = 0$ とは異なる解を得るためには，この連立一次方程式の係数の行列式が 0 でなければならない。

$$\begin{vmatrix} a-\dfrac{b}{30} & \dfrac{2}{5}a-\dfrac{b}{105} \\ \dfrac{2}{5}a-\dfrac{b}{105} & \dfrac{2}{5}a-\dfrac{\mathrm{b}}{280} \end{vmatrix} = 0$$

すなわち，

$$\left(a-\frac{b}{30}\right)\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{280}\right)-\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)^2 = 0$$

この方程式は**振動数方程式**（*frequency equation*）とよばれ，この式から，関数

$$u(x, t) = y(x)\cos bt$$

で記述されるくさびの自由振動の（角）振動数 b が決定される。振動数方程式は一般に二つの根 b_1, b_2 をもつ。それらのうちで小さいものが，くさびの振動の基本振動数の近似値を与える。

例題 2. 角柱あるいは円柱の捩れに関係した問題では，汎関数

$$v(z(x, y)) = \iint_D \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + x\right)^2\right) dx\,dy$$

の極値を調べなければならない。

底面が楕円形の柱の場合には，積分領域 D は楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

の内部である。この場合には，ただ一つの基底関数 xy をとれば

$$z_1 = \alpha xy, \qquad v(z_1) = v_1 = \frac{\pi ab}{4}\left((\alpha+1)^2 a^2 + (\alpha-1)^2 b^2\right)$$

を得る。極値に対する必要条件は

$$(\alpha+1)a^2 + (\alpha-1)b^2 = 0$$

となって，

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}, \qquad z_1 = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}xy$$

が得られる。

例題 3. 前の例題と同じ仮定に加えて，領域 D が長方形であり，その二辺が，それぞれ $2a$, $2b$, $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ であるとして z を見出せ。

基底関数系として，xy, xy^3, x^3y をとって

$$z_3 = \alpha_1 xy + \alpha_2 xy^3 + \alpha_3 x^3 y$$

とおけば

$$v_3 = v(z_3) = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\left(\frac{\partial z_3}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial z_3}{\partial y} + x\right)^2\right) dx dy$$

$$= \frac{4}{3} ab^3 (\alpha_1 - 1)^2 + 4ab^5\left(\frac{b^2}{7} + \frac{3a^2}{5}\right)\alpha_2^2 + 4a^5 b\left(\frac{a^2}{7} + \frac{3b^2}{5}\right)\alpha_2^2 +$$

$$+ \frac{4}{3} a^3 b (\alpha_1 + 1)^2 + \frac{8}{5} ab^5 (\alpha_1 - 1)\alpha_2 + \frac{8}{5} a^3 b (\alpha_1 + 1)\alpha_2 -$$

$$- \frac{8}{5} a^5 b (\alpha_1 + 1)\alpha_3 - \frac{8}{5} a^3 b^3 (a^2 + b^2)\alpha_2 \alpha_3 - \frac{8}{3} a^3 b^3 (\alpha_1 - 1)\alpha$$

極値に対する基本的な必要条件

$$\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} = 0$$

から $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を計算することができて，つぎのようになる：

$$\alpha_1 = -\frac{7(a^6 - b^6) + 135a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{7(a^6 + b^6) + 107a^2 b^2 (a^2 + b^2)},$$

$$\alpha_2 = -\frac{7a^2 (3a^2 + 35b^2)}{21(a^6 + b^6) + 321a^2 b^2 (a^2 + b^2)},$$

$$\alpha_3 = -\frac{7b^2 (35a^2 + 3b^2)}{21(a^6 + b^6) + 321a^2 b^2 (a^2 + b^2)}$$

例題　4.　長方形 $D, 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b$ の内部における方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

の解を見出せ。ただし，解は D の境界上で 0 になるものと仮定する。

関数 $f(x, y)$ は D の内部で $f(x, y)$ に一様収束する二重フーリェ級数に展開できるものと仮定する。すなわち

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$$

この境界値問題は，一つの変分問題に帰着させることができる。すなわち，われわれは，与えられた方程式を，オストログラツキーの方程式とするような，汎関数を選ぶことがで

き，そして直接的な方法の一つを用いて，最初の境界値問題の解を見出すことができる。
さて，方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)$$

が，汎関数

$$v(z(x,y))=\iint_D\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x,y)\right)dxdy$$

に対するオストログラツキーの方程式であることは容易にわかる（44 頁を参照)。汎関数に対する境界条件は同じである。すなわち，領域 D の境界上で $z=0$ である。この汎関数の極値をリッツの方法で調べてみよう。基底関数系として

$$\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b},\qquad m,n=1,2,\ldots$$

をとる。これらの関数のおのおのは，それらのすべての一次結合とともに D の境界上で境界条件 $z=0$ を満足する。さらに，この関数系は完全である。

$$z_{nm}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}a_{pq}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$$

とおけば

$$\begin{aligned}v(z_{nm})&=\int_0^a\int_0^b\left(\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial y}\right)^2+\right.\\&\qquad\left.+2z_{nm}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\beta_{pq}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}\right)dxdy\\&=\frac{\pi^2ab}{4}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)a_{pq}^2+\frac{ab}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}a_{pq}\beta_{pq}\end{aligned}$$

が得られる。この式は，基底関数 $\sin p\dfrac{\pi x}{a}\sin q\dfrac{\pi y}{b}$ $(p,q=1,2,\ldots)$ が領域 D において直交系をつくること，すなわち，$p=p_1$，$q=q_1$ の場合を除いて，すべての正の整数 p,q,p_1,q_1 に対して

$$\iint_D \sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}\sin p_1\frac{\pi x}{a}\sin q_1\frac{\pi y}{b}dxdy = 0$$

であること，および，もし $p = p_1$ かつ $q = q_1$ であれば

$$\iint_D \sin^2 p\frac{\pi x}{a}\sin^2 q\frac{\pi y}{b}\,dxdy = \frac{ab}{4}$$

であることに注目すれば，容易に得られる。 このことに注意すれば，$v(z_{nm})$ の積分表示では，関数

$$\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}, \quad \sin p\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}, \quad \cos p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$$

の二乗を含むような項だけをとればよいのである。明らかに $v(z_{nm})$ は係数 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nm}$ のある関数 $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nm})$ であって， これらは極値に対する基本的な必要条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_{pq}} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n; \quad q = 1, 2, \ldots, m$$

によって決定することができる。この方程式系は

$$\alpha_{pq}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q_2}{b^2}\right)\pi^2+\beta_{pq} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n, \quad q = 1, 2, \ldots, m$$

の形をとり，したがって

$$\alpha_{pq} = -\frac{\beta_{pq}}{\pi^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)}$$

が得られる。それゆえ

$$z_{nm} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$$

となる。n と m の両方を無限大にする極限過程によって，この場合には正確な解

$$z = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\beta_{pq}}{\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$$

が得られる。

4. カントロヴィッチの方法

リッツ の方法を，いくつかの 独立変数を含む 関数に依存しているような，$v\big(z(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$ の形の汎関数に 適用するときには， われわれは 基底関数系

$$W_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ W_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ W_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$

を選び，与えられた変分問題の近似解を

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k W_k(x_1, \ldots, x_n)$$

の形に決定しなければならない。ここに係数 a_k は定数である。

カントロヴィッチの方法（***Kantorovič method***）も，基底関数系

$$W_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ W_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ W_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$

を選ぶことから出発するが，しかし近似的な解を

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

の形に決定することを試みるのである。ここに係数 $a_k(x_i)$ は，今度は 定数ではなくて，独立変数の一つの未知関数である。

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k(x_i)\ W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

の形の関数のみに対して考えた汎関数 $v(z)$ は，一個の独立変数をもつ m 個の関数

$$a_1(x_i),\ a_2(x_i),\ \ldots,\ a_m(x_i)$$

に依存する一つの汎関数 $\tilde{v}\big(a_1(x_i),\ a_2(x_i),\ \ldots,\ a_m(x_i)\big)$ に変わる。これら m 個の関数を，汎関数 $\tilde{v}$ が極値をとるように選ばなければならない。

これがなされたら，$m \to \infty$ の極限過程によって，ある条件の下では正確な解が得られる。もし極限過程が完遂されないならば，このようにして一つの近似解が得られるわけであるが，この近似解は一般に，同じ基底関数を同じ m 個だけとったとき，リッツの方法によって得られる近似解よりも，はるかによい近似になっている。

このようにして得られた近似解がよい理由は，$a_k(x_i)$ を定数ではなくて，一つの変数 x_i の関数としたときの関数族

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k(x_i) W_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

は，a_k が定数であるときの関数族

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} a_k W_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

よりも，はるかに広いからである。

たとえば，汎関数

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy$$

の極値を見出さねばならないと仮定しよう。ただし積分は曲線 $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ および，二つの直線 $x = x_0$, $x = x_1$ によって決定される領域 D にわたるものである（図 53）。D の境界上での関数 $z(x,\ y)$ の値は与えられている。われわれは基底関数列

$$W_1(x,\ y),\ W_2(x,\ y),\ \ldots,\ W_n(x,\ y),\ \ldots$$

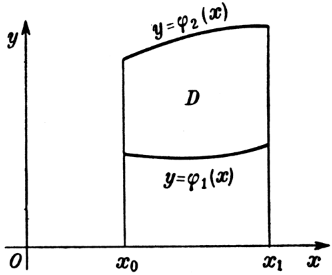


図　53.

を選ぶ。もしこの関数列の初めの m 個の関数だけをとれば，われわれは変分の問題の

$$z_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(x)W_k(x,\ y)$$

の形，あるいは $a_k(x)$ を $u_k(x)$ でおきかえて

$$z_m(x,\ y)=u_1(x)W_1(x,\ y)+u_2(x)W_2(x,\ y)+\dots+\\ +u_m(x)W_m(x,\ y)$$

の形の解を，見出すことを試みるわけである。ここに W_k はすぐ上で選んだ基底関数であり，また u_k は未知関数であって，この u_k が v を極値にするように決定されるのである。

$z_m(x,\ y)$ を入れると

$$v\bigl(z_m(x,\ y)\bigr)=\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F\left(x,\ y,\ z_m(x,\ y),\ \frac{\partial z_m}{\partial x},\ \frac{\partial z_m}{\partial y}\right)dy$$

が得られる。被積分関数は既知であり y だけに依存するから，y に関する積分は実行できて，それゆえ汎関数 $v\bigl(z_m(x,\ y)\bigr)$ は，つぎのような形になる：

$$v\bigl(z_m(x,\ y)\bigr)=\int_{x_0}^{x_1}\varphi\bigl(x,\ u_1(x),\ \dots,\ u_m(x),\ u_1',\ \dots,\ u_m'\bigr)dx$$

関数 $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_m(x)$ は, $v\bigl(z_m(x, y)\bigr)$ を極値にするように選ばれる。したがって, $u_i(x)$ はつぎのオイラーの方程式系を満足する：

$$\varphi_{u_1} - \frac{d}{dx}\varphi_{u_1'} = 0$$

$$\varphi_{u_2} - \frac{d}{dx}\varphi_{u_2'} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{u_m} - \frac{d}{dx}\varphi_{u_m'} = 0$$

任意定数は, $z_m(x, y)$ が, 直線 $x = x_0$ および $x = x_1$ で与えられた境界条件を満足するように選ばれる。

例題 1. 汎関数

$$v(z(x, y)) = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right)dxdy$$

の極値を調べよ。ここに, 積分領域の境界で, $z = 0$ であるとする。

この領域は長方形 $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ である。われわれは, この場合には $z_1 = (b^2 - y^2)u(x)$ の形の解を見出すことを試みてみよう。もちろん, この種の関数は, 直線 $y = \pm b$ 上で境界条件を満足する。そうすると

$$v(z_1) = \int_{-a}^{a}\left(\frac{16}{15}b^5u'^2 + \frac{8}{3}b^3u^2 - \frac{8}{3}b^3u\right)dx$$

となる。この汎関数に対するオイラーの方程式

$$u'' - \frac{5}{2b^2}u = -\frac{5}{4b^2}$$

は定数係数の線形微分方程式であって, その一般解は

$$u = C_1\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x}{b} + C_2\sinh\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x}{b} + \frac{1}{2}$$

である。定数 C_1, C_2 は，境界条件 $z(-a)=z(a)=0$ によって決定されて

$$C_2=0, \quad C_1=-\frac{1}{2\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{a}{b}}$$

が得られ，それゆえ

$$u=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x}{b}}{\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{a}{b}}\right)$$

となって，結局

$$z_1=\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left(1-\frac{\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x}{b}}{\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{a}{b}}\right)$$

が得られる。もっと正確な解を得たいならば

$$z_2=(b^2-y^2)u_1(x)+(b^2-y^2)^2u_2(x)$$

の形の解を見出すことを試みればよい。

例題 2. 領域 D において方程式 $\Delta z=-1$ の連続な解を見出せ。ただし領域 D は，直線 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ と $x=b$ によって決定される二等辺三角形である（図 **54**）。この解は領域 D の境界上で 0 になることが要求されている。

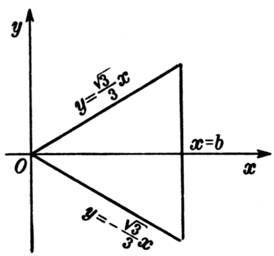


図　54.

方程式 $\Delta z = -1$ は，汎関数

$$v(z) = \int_0^b \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right) dxdy$$

の，オストログラツキーの方程式である。ただし積分領域の境界上で $z = 0$ と仮定する。カントロヴィッチの方法にしたがって

$$z_1 = \left(y^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2\right) u(x)$$

の形の第一近似を見出すことを試みよう。z_1 をこのように選ぶと，直線 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上での境界条件は満足される。

y についての積分を行なえば，汎関数 $v(z_1)$ は

$$v(z_1) = \frac{8\sqrt{3}}{405} \int_0^b (2x^5 u'^2 + 10x^4 uu' + 30x^3 u^2 + 15x^3 u)\, dx$$

の形をとる。このオイラーの方程式は

$$x^2 u'' + 5xu' - 5u = \frac{15}{4}$$

である。微分方程式の理論では，この形の線形微分方程式は，**オイラーの方程式**（***Euler equation***）とよばれている。

この非同次方程式の一つの特解は，明らかに $u = -\frac{3}{4}$ である。対応する同次方程式の解は，$u = x^k$ の形で見出すことができて，結局 $u = C_1 x + C_2 x^{-5} - \frac{3}{4}$ が得られる。$x = 0$ のある近傍で，解 u は有界でなければならないから，$C_2=0$ でなければならない。他方 $u(b) = 0$ によって，$C_1 = -3/4b$ となって，結局

$$z_1 = -\frac{3}{4}\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(y^2 - \frac{1}{3}x^2\right)$$

が得られる。

問　　　題

1. 正方形 $-a\leqslant x\leqslant a,\ -a\leqslant y\leqslant a$ の内部で，方程式 $\Delta z=-1$ を満足し，この正方形の周上で，0 という境界条件を満たす近似解を見出せ。

ヒント：この問題は，汎関数

$$\iint_D \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right)dxdy$$

の極値を調べる問題に還元される。近似解は

$$z_0=a(x^2-a^2)(y^2-a^2)$$

の形で決定することができる。

2. 汎関数

$$v(y(x))=\int_0^1 (x^3y''^2+100xy^2-20xy)\,dx,\qquad y(1)=y'(1)=0$$

の極値問題の一つの近似解を見出せ。

ヒント：一つの近似解は

$$y_n(x)=(x-1)^2(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)$$

の形で決定することができる。$n=1$ に対して計算を行なえ。

3. 汎関数

$$v(y(x))=\int_0^1 (y'^2-y^2-2xy)\,dx,\qquad y(0)=y(1)=0$$

の極小を見出す問題の近似解を見出せ。そしてこの解を正確な解と比較せよ。

ヒント：近似解は

$$y_n=x(1-x)(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)$$

の形で決定することができる。この解を $n=0$ および $n=1$ に対して計算せよ。

4. 汎関数

$$v(y(x))=\int_1^2 \left(xy'^2-\frac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right)dx,\qquad y(1)=y(2)=0$$

の極値問題の近似解を見出し，この解を正確な解と比較せよ。

ヒント：近似解は

$$y = a(x-1)(x-2)$$

の形で決定することができる。

5. リッツの方法を用いて，汎関数

$$v(y(x)) = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy)\,dx, \qquad y(0) = y(2) = 0$$

の極小を見出す問題の近似解を見出して，この解を正確な解と比較せよ。

ヒント：問題 **3** を参照せよ。

6. リッツの方法を用いて，微分方程式

$$y'' + x^2 y = x, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

の近似解を見出せ。$y_2(x)$, $y_3(x)$ を求めて，点 $x = 0{,}25$, $x = 0{,}5$, $x = 0{,}75$ におけるそれらの値を比較せよ。

問　題　解　答

I 章　　55 頁

1. 極値曲線は円群

$$(x-C_1)^2+y^2=C_2^2$$

である。

2. 積分は積分路にはよらない。この変分の問題は意味がない。
3. 連続関数族の中には極値は存在しない。
4. 極値曲線はつぎの放物線群である。

$$y-C_1=\frac{1}{4}\cdot\frac{(x-C_2)^2}{C_1}$$

5. 極値曲線は直角双曲線群

$$y=\frac{C_1}{x}+C_2$$

である。

6. $y=C_1\sin(4x-C_2)$
7. $y=-\frac{1}{4}x^2+C_1x+C_2$
8. $y=\sinh(C_1x+C_2)$
9. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$
10. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$
11. $y=\dfrac{x^7}{7!}+C_1x^5+C_2x^4+C_3x^3+C_4x^2+C_5x+C_6$
12. $y=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\sin x$, $z=2y+y''$

後の式から z を定めることは容易である。

13. 直線群, $y=C_1x+C_2$,　　$z=C_3x+C_4$

14. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$

16. $y=C_1x^4+C_2$.

17. $y=(C_1x+C_2)e^x+(C_3x+C_4)e^{-x}$

18. $y=\frac{1}{2}\cosh x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

19. $y=\frac{1}{2}xe^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$.

20. $y=-\dfrac{x\cos x}{2}+C_1\cos x+C_2\sin x$

II 章 94 頁

1. $0\leqslant x\leqslant 1$ に対して $y=-x$; $1\leqslant x\leqslant 4$ に対して $y=x-2$; および, $0\leqslant x\leqslant 3$ に対して $y=x$, $3\leqslant x\leqslant 4$ に対して $y=-x+6$。この両方の折れ線に沿って汎関数は極小値をもつ。

2. 存在しない。

3. 存在しない。

4. 傾き（勾配）$\sqrt{3}$ および $-\sqrt{3}$ をもつ線分から成り，与えられた点を通る折れ線。

5. $\dfrac{-\varphi'-y'}{1+y'\varphi'}=1$ すなわち，極値曲線は，端点がすべり動く曲線 $y_1=\varphi(x_1)$ と角 $\pi/2$ で交わらなければならない。

6. $y=\dfrac{x^5}{120}+\dfrac{1}{24}(x^2-x^3)$

7. $0\leqslant x\leqslant\frac{16}{5}$ に対して $y=\pm\frac{3}{4}x$, $\frac{16}{5}\leqslant x\leqslant\frac{34}{5}$ に対して $y=\pm\sqrt{9-(x-5)^2}$, $\frac{34}{5}\leqslant x\leqslant 10$ に対して $y=\mp\frac{3}{4}(x-10)$ すなわち，曲線は，円に接する線分，円弧および，ふたたび円に接する線分から成る。

8. $y\equiv 0$

9. 円弧 $y=\pm\sqrt{8x-x^2}$

10. 点 A から $\cos(\beta-\alpha)=v_1/v_2$ である直線に沿って曲線まで行けばよい。ここに β はこの直線の傾き（勾配）で，α は，$y=\varphi(x)$ と，曲線 $y=\varphi(x)$ に近づいていく一つの直線との交点 $B(x_1,y_1)$ における $y=\varphi(x)$ の接線の傾き（勾配）である。

ヒント：これは，汎関数

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{v_2} dx$$

の極値に対する一つの混合問題である。

III 章 117 頁

1. $y = -x^2/4+1$ に沿って強い極小がある。
2. $0 < a < \pi/4$ なら，$y = 0$ に沿って強い極小がある。
3. 連続曲線族の中には極値は存在しない。
4. $y = 7-4/x$ に沿って強い極小がある。
5. $y = 1$ に沿って強い極小がある。
6. $y = \sin 2x - 1$ に沿って強い極大がある。
7. $y = x^3$ に沿って強い極小がある。
8. 極値曲線群は $y = \sinh(C_1 x + C_2)$ である。

C_1, C_2 は，方程式 $y_0 = \sinh(C_1 x_0 + C_2)$, $y_1 = \sinh(C_1 x_1 + C_2)$ から決めることができる。これは弱い極小である。

9. $y = \frac{1}{3}e^{2x}$ に沿って強い極小がある。
10. $y = \sin 2x$ に沿って強い極大がある。
11. 直線 $y = \dfrac{y_1}{x_1}x$ に沿って弱い極小がある。
12. 直線 $y = \dfrac{y_1}{x_1}x$ に沿って弱い極小がある。
13. $y = x^2$ に沿って弱い極小がある。
14. $y = x^3-1$ に沿って強い極大がある。

IV 章 139 頁

1. $y = \pm 2\sin n\pi x$, n は整数とする。
2. $\varphi = C_1 + C_2 z$, $r = R$
3. $y = \lambda x^2 + C_1 x + C_2$，ここに C_1, C_2, λ は境界条件と，等周条件から決定される。
4. $\dfrac{d}{dx}(p(x)y') + (\lambda r(x) - q(x))y = 0, y(0) = 0, y(x_1) = 0$

自明な解 $y \equiv 0$ は等周条件を満足しない。そしてよく知られているように，自明でない解は，λ のあるいくつかの値に対してのみ存在する。その値は**固有値**（*eigenvalue*）と

よばれる。したがって λ は一つの固有値でなければならない。オイラーの方程式の一般解の中の任意定数の一つは $y(0)=0$ の条件から決定され，残りの一つは等周条件から決定することができる。

5．$y=-\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{2}x,\qquad z=x$

V 章　163 頁

1．$z_1=\dfrac{5}{16a^2}(x^2-a^2)(y^2-b^2)$，もっとよい近似が必要なら，われわれは

$$z_2=(x^2-a^2)(y^2-b^2)\left(a_0+a_1(x^2+y^2)\right)$$

の形の解を見出すように試みればよい。

2．$y_1=(x-1)^2\ (0.124+0.218x)$

3．正確な解は

$$y=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$$

である。

4．オイラーの方程式の解は $y=3.6072J_1(x)+0.75195\,Y_1(x)-x$ である。ここに J_1, Y_1 は一次のベッセル関数である。

5．正確な解は $y=\dfrac{2\sinh x}{\sinh 2}-x$ である。

6．もし

$$y_2=x(x-1)(a_1+a_2x),$$
$$y_3=x(x-1)(a_1+a_2x+a_3x^2)$$

の形の解を見出そうと試みるならば，そのときには

$$y_2=x(x-1)(0.1708+0.17436x),$$
$$y_3=x(x-1)(0.1705+0.1760x-0.0018x^2)$$

が得られる。与えられた点において，y_2 および y_3 の値は，0.0001 まで同じである。

参 考 文 献

Akhiezer, N. I.: "The Calculus of Variations," translated by A. H. Frink, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Mass., 1962.

Bellman, R.: "Dynamic Programming," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

——: "Adaptive Control Processes: A Guided Tour," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961.

—— and S. E. Dreyfus: "Applied Dynamic Programming," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962.

Bliss, G. A.: "Calculus of Variations," Carus Monograph 1, Mathematica Association of America, The Open Court Publishing Company, La Salle, III., 1925.

——: "Lectures on the Calculus of Variations," University of Chicago Press, Chicago, 1946.

Bolza, O.: "Lectures on the Calculus of Variations," reprint of 1904 ed. by G. E. Stechert & Company, New York, 1931.

Courant, R.: "Differential and Integral Calculus," Interscience Publishers (Division of John Wiley & Sons, Inc.), New York, vols. I and II, 1937.

—— and D. Hilbert: "Methods of Mathematical Physics," vol. I, Interscience Publishers (Division of John Wiley & Sons, Inc.), New York, 1953.

Crandall, S.: "Engineering Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

Forsyth, A. R.: "Calculus of Variations," reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1960.

Danese, A.: "An Introduction to Applied Mathematics," vol. II, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1965.

Dettman, J.: "Mathematical Methods in Physics and Engineering," McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

Forray, M. J.: "Variational Calculus in Science and Engineering," McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

Fox, C.: "An Introduction to the Calculus of Variations," Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1950.

Gelfand, I. M., and S. V. Fomin: "Calculus of Variations," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963. (関根智明訳：ゲリファント・フォーミン "変分法" 総合図書, 1970)

Gould, S. H.: "Variational Methods for Eigenvalue Problems," University of Toronto Press, Toronto, 1957.

Hildebrand, F. B.: "Methods of Applied Mathematics," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.

Hoff, N. J.: "The Analysis of Structures," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.

Irving, J., and N. Mullineux: "Mathematics in Physics and Engineering., Academic Press Inc., New York, 1959.

Jeffreys, H.: "Cartesian Tensors," Cambridge University Press, London, 1957.

Kantorovich, L. V., and V. I. Krylov: "Approximate Methods of Higher Analysis," Interscience Publishers (Division of John Wiley & Sons, Inc.), New York, 1958.

Lanczos, C.: "The Variational Principle of Mechanics," University of Toronto Press, Toronto, 1949.

Langhaar, H.: "Energy Methods in Applied Mechanics," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

McConnell, A. J.: "Applications of Tensor Analysis," Dover Publications, Inc., New York, 1957.

Morrey, C. B. Jr.: "Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and Related Topics," University of California: Press, Berkeley and Los Angeles, 1943.

Morse, M. "The Calculus of Variations in the Large," American Mathematical Society, Providence, R. I., 1934.

Murnaghan, F. D.: "The Calculus of Variations," Spartan Books, Washington, D. C., 1962.

Ojalvo, I. U., and R. F. Russell: "Approximate Structural Analysis Techniques Employing Undetermined Parameters," TR-66-59, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, July, 1966.

Pars, L. A.: "Calculus of Variations," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

Sagan, H.: "Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics." John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

Sokolnikoff, I. S.: "Mathematical Theory of Elasticity," McGraw-Hill Book Company, 1956.

——: "Tensor Analysis: Theory and Applications," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

Synge, J. L., and B. A. Griffith: "Principles of Mechanics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1949.

Temple, G., and W. G. Bickley: "Rayleigh's Principle," Dover Publications, Inc., New York, 1956.

Timoshenko, S.: "Theory of Elastic Stability," 1st ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1936.

——: "Theory of Plates and Shells," 1st ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1940.

——: "Vibration Problems in Engineering," 2d ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1937.

—— and J. N. Goodier: "Theory of Elasticity," McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

Wang, C. T.: "Applied Elasticity," McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

Weinstock, Robert: "Calculus of Variations," McGraw-Hill Book Company, New York, 1952.

林　毅，村　外志夫："変分法"，コロナ社，1958.

長谷川　節："変分学の応用"，森北出版，1969.

索　　　引

あ　行

動きうる境界をもつ変分の問題 (Variational problems with movable boundaries) … 58
円柱の捩れ (Torsion of cylinder) ……153
オイラーの方程式 (EULER equation) ……21,58,66,160
——の第一積分 (First integral of——) ……28,29,30
——の積分曲線 (Integral curve of——) ……21,32,59,66,85,86
——の 2n-パラメーター群 (2n-parameter family of——) …… 32
線形微分方程式の—— (——in linear differential equation)……162
オイラー・ポアソンの方程式 (EULER-POISSON equation)……37,73
オイラー・ラグランジュの方程式 (EULER-LAGRANGE equation) …… 43
オストログラツキー・ハミルトンの原理(Principle of OSTROGRADSKI-HAMILTON) 51,127
オストログラツキーの方程式 (OSTROGRADSKI equation) ……43,148
横断性の条件 (Transversality condition)……63,69
折れ線 (Polygonal curve)……85,142

か　行

関数 (Function) …… 5
通常の—— (Ordinary——) …… 2
線形—— (Linear——) …… 8
互に近い—— (——close to each other)…… 6
汎—— (Functional) (汎関数を見よ)…… 1
連続—— (Continuous——) …… 7
線形—— (Linear——) …… 8
変—— (Argument) …… 5
微分可能な—— (Differentiable——) …… 8
連続—— (Continuous——) ……5,7,8
——の連続性 (Continuity of——) ……60,67,74,90
——の変分 (Variation of——) ……15,124
——の微分 (Differential of——) …… 11
ワイヤストラスの——(WEIERSTRASS——) ……106
関数 F が y' を含まない場合(F does not depend on y')…… 22
関数 F が y' について一次の場合 (F is linear in y') …… 24
関数 F が y' だけを含む場合 (F depends on y' only)…… 26
関数 F が x と y' だけを含む場合 (F depends on x and y' only) …… 27
関数 F が y と y' だけを含む場合 (F depends on y and y' only) …… 28
カテノイド (Catenoid) …… 29
傾きの関数(Slope function)…… 98
回転面の表面積 (Area of a surface of revolution)…… 28

片側変分 (One-sided variation) ………………………… 88
角をもつ極値曲線が満足すべき条件 (Conditions satisfied by extremal with corner)… 85
角柱の捩れ (Torsion of prism) ………………………… 153
完全微分 (Exact differential) ………………………… 25,26
カントロヴィッチの方法 (KANTOROVIČ method) ………………………… 157
基底関数系 (Coordinate functions) ………………………… 146,147
狭義の極大 (Absolute maximum) ………………………… 11
共役な点 (Conjugate point) ………………………… 101
境界値の変分 (Variation of boundary values) ………………………… 59
極値曲線 (Extremal) ………………………… 21,37
　——の曲線束 (Pencil of——) ………………………… 59
　尖点をもつ—— (——with cusp) ………………………… 76
　反射された—— (Reflected——) ………………………… 77
　——の屈折 (Refraction of——) ………………………… 81
　角をもつ—— (——with corner) ………………………… 83
　——のパラメーター表示 (Parametric representation of——) ………………………… 47,136,137
　——の場 (Field of——) ………………………… 98
極値に対する必要条件 (Necessary conditions for an extremum)
8,42,45,59,62,75,77,82,90,107
極値に対する十分条件 (Sufficiency conditions for an extremum) ………………………… 89,106
　——の表 (List of——) ………………………… 116,117
　極小列 (Minimizing sequence) ………………………… 149
極値曲面 (Surface which gives an extremum) ………………………… 40
曲線 (Curve)
　互に近い—— (——　-s close to each other) ………………………… 6,59
　——の長さ (Length of——) ………………………… 1,4
　極値—— (Extremal) ………………………… 21,37
　不連続—— (——of discontinuity) ………………………… 81
曲面 (Surface)
　——間の距離 (Distance between two——) ………………………… 70
　——の面積 (Area of——) ………………………… 1
　　最小—— (Minimum——) ………………………… 44
　　最大—— (Maximum——) ………………………… 47
　極値—— (Surface which gives an extremum) ………………………… 40
屈折角 (Angle of refraction) ………………………… 83
屈折の原理(Principle of refraction) ………………………… 83
くさびの振動 (Vibration of wedge) ………………………… 151
グリーンの公式 (GREEN's formula) ………………………… 42
系の運動エネルギー (Kinetic energy of system) ………………………… 51
系のポテンシャルエネルギー (Potential energy of system) ………………………… 51
懸垂線 (Catenary) ………………………… 29,139
拘束条件つきの極値 (Constrained extrema) ………………………… 119
　微分形の—— (Differential——) ………………………… 128
　積分形の—— (Integral——) ………………………… 132

有限の形の——(Finite——) ……122
固有場 (Proper field) …… 96
混合問題 (Mixed problems) …… 91
混合変分問題 (Mixed variational problem) …… 92
合成関数の微分法 (Differentiation of composite function) …… 9

さ　行

サイクロイド (Cycloid) …… 3,30,68,111
最速降下線 (Brachistochrone) …… 2
——の問題 (——problem) …… 2,30,64,111
最小回転面の問題 (Problem of minimum surface of revolution) …… 28
差分法による方法 (Method of finite differences) …… 142
C-判別式 (C-discriminant) …… 99
振　動 (Vibration)
膜の—— (——of membrane) …… 54
細長い棒の—— (——of linear rod) …… 54
弦の—— (——of string) …… 53
くさびの—— (——of wedge) …… 151
振動数方程式 (Frequency equation) …… 153
重調和方程式 (Biharmonic equation) …… 46
正弦曲線束 (Pencil of sine curves) …… 97
尖　点 (Cusp) …… 77
——をもつ極値曲線 (Extremal with——) …… 76
線形関数 (Linear function) …… 8
線形汎関数 (Linear functional) …… 8
線形主要部 (Main linear part) …… 9,60,67,73
測地線 (Geodesics) …… 3,139
——の問題 (Problem of——) …… 3
相反性の原理 (Principle of reciprocity) …… 135

た　行

互に近い曲線 (Curves close to each other) …… 6,59
互に近い関数 (Functions close to each other) …… 6
弾性体の柱状の梁 (Elastic cylindrical beam) …… 38
弾性弦 (Elastic string) …… 53
——の自由振動 (Free vibrations of——) …… 53
——のポテンシャル・エネルギー (Potential energy of——) …… 53
——の運動のエネルギー (Kinetic energy of——) …… 53
——の運動方程式 (Equation of vibrating——) …… 53,54
——の強制振動の方程式 (Equation of forced vibrations of——) …… 54
弾性棒 (Elastic rod) …… 54
——の自由振動 (Free vibrations of——) …… 55

——のポテンシャル・エネルギー (Potential energy of——) ··· 54
——の運動エネルギー (Kinetic energy of——) ··· 54
——の運動方程式 (Equation of vibrating——) ··· 54
近　さ (Closeness) ··· 6,7
0 次の—— (——of order zero) ··· 6,7
1 次の—— (——of order one) ··· 6,7
k 次の—— (——of order k) ··· 6,7
中心場 (Central field) ··· 97
直線群 (Family of straight lines) ··· 26
2-パラメーター—— (Two-parameter——) ··· 26
1-パラメーター—— (One-parameter——) ··· 26
直交条件 (Orthogonality condition) ··· 64
強　い (Strong) ··· 12
——極大 (——maximum) ··· 12,106,110
——極小 (——minimum) ··· 12,106,110
停留曲線(Stationary curve) ··· 21
テーラーの公式 (TAYLOR's formula) ··· 53,60,67,109,110,114,124
ディリクレの問題 (DIRICHLET problem) ··· 44
等周条件 (Isoperimetric conditions) ··· 4,133
等周問題 (Isoperimetric problem) ··· 3,131
同次関数 (Homogeneous function) ··· 48
一次の—— (——of the first order) ··· 48

な　行

入射角 (Angle of incidence) ··· 80,81
二次の変分 (Second variation) ··· 114,115

は　行

汎関数 (範関数) (Functional) ··· 1,5
いくつかの変関数を含む—— (——involving several argument) ··· 31
高階の導関数を含む—— (——involving derivatives of higher order) ··· 34
線形—— (Linear——) ··· 8
任意個数の関数を含む—— (——involving an arbitrary number of functions) ··· 39
数個の独立変数を含む関数に依存する—— (——depending on functions of several independent variables) ··· 40
——の変分 (Variation of——) ··· 9
——に対する定理の証明 (Proof of the theorem for——) ··· 11
——の最大下界 (Greatest lower bound of——) ··· 23
補助的な—— (Auxiliary——) ··· 122,129,137,138
反射角 (Angle of reflection) ··· 80,81
反射された極値曲線 (Reflected extremal) ··· 77
場 (Field) ··· 96

——の傾き (Slope of the field) ………… 96
極値曲線の—— (——of extremals) ………… 98
比較曲線 (Comparison curve) ………… 15
2n 回微分可能な—— (2n times differentiable——) ………… 34
微分可能な関数 (Differentiable function) ………… 8
不連続曲線 (Curve of discontinuity) ………… 81
平均値の定理 (Mean value theorem) ………… 60,67,74,90
変化しうる境界をもつ問題 (Problem with variable boundaries) ………… 73
変　分 (Variation)
汎関数の—— (——of the functional) ………… 9
関数の—— (——of the function) ………… 15
境界値の—— (——of boundary values) ………… 59
片側—— (One-sided——) ………… 88
二次の—— (Second——) ………… 114,115
——問題 (——-al problem) ………… 2
変分法の基本補題 (Fundamental lemma of the calculus of variations) ………… 18
変分問題 (Variational problem) ………… 2
——のパラメーター表示 (Parametric representation of——) ………… 47
ポアソンの方程式 (POISSON equation) ………… 44,148

ま　行

膜の振動 (Vibrating membrane) ………… 54

や　行

ヤコビの条件 (JACOBI'S condition) ………… 101
解析的な形の—— (Analytical——) ………… 101
ヤコビの方程式 (JACOBI'S equation) ………… 102
弱　い (Weak) ………… 12
——極大 (——maximum) ………… 12,106,110
——極小 (——minimum) ………… 12,106,110

ら　行

ラグランジュの乗数法 (LAGRANGE method of multipliers) ………… 120,133
ラグランジュの運動方程式 (LAGRANGE'S equation of motion) ………… 52
ラプラスの方程式 (LAPLACE equation) ………… 44
リッツの方法 (RITZ'S method) ………… 144
——の誤差の評価 (Estimate of the error of——) ………… 150,151
ルジャンドルの条件 (LEGENDRE condition) ………… 110
ルジャンドルの強い条件 (Strong condition of LEGENDRE) ………… 110
連続関数 (Continuous function) ………… 5,7,8
連続汎関数 (Continuous functional) ………… 5,7,8

わ　行

ワイヤストラスの関数 (WEIERSTRASS function) ………… 106

人 名 索 引

Bernoulli, Jacob	ヤコブ・ベルヌイ(兄)	3
Bernoulli, Johann	ヨハン・ベルヌイ(弟)	2,3
Bogolubov, N. N.	ボゴリューボフ	141
de l'Hospital	ド・ロピタル	3
Dirichlet, P. G. L.	ディリクレ	44
Euler, L.	オイラー	2,43,73
Green, G.	グリーン	42
Hamilton, W. R.	ハミルトン	51
Jacobi, K. G.	ヤ コ ビ	101,102,115
Kantrovič, L. V.	カントロヴィッチ	141,157
Krylov, N. M.	クリーロフ	141
Lagrange, J. L.	ラグランジュ	3,43,120
Laplace, P. S.	ラプラス	44
Legendre, A. M.	ルジャンドル	110
Lusternik. L. A.	ルステルニク	141
Mikhlin, S. G.	ミクリン	141,148
Newton, I.	ニュートン	3
Ostrogradski	オストログラツキー	43
Petrovski, I. G.	ペトロフスキー	141
Poisson, S. D.	ポアソン	44,73
Ritz, W.	リッツ	141,144
Taylor, B.	テーラー	53,60,67
Weierstrass, K.	ワイヤーストラス	101,102,115

訳者の略歴

1925年　松山市に生まれる
1948年　京都大学理学部物理学科卒業
1960年　理学博士
現　在　愛媛大学教授

主要著書
ゴールドスタイン：古典力学（共訳，吉岡書店，1959）
ツルミユール：マトリクスの理論と応用（共訳，ブレイン図書出版，1972）

L.E.エルスゴルツ：科学者・技術者のための変分法

1972年12月27日　第1版1刷発行
1984年10月27日　第1版13刷発行

訳者　瀬川富士（せがわとみお）
発行者　ブレイン図書出版株式会社
印刷者　株式会社　関洋紙店印刷所

発行所　ブレイン図書出版株式会社
〒110 東京都台東区東上野1丁目16－7 徳田ビル
電話(832)5407番 振替東京2-45625番
発売所　丸善株式会社
東京都中央区日本橋通2丁目6

印刷・株式会社 関洋紙店印刷所　製本・永木製本所